

*Федеральное агентство по образованию*

*АССОЦИАЦИЯ КАФЕДР ФИЗИКИ  
ТЕХНИЧЕСКИХ ВУЗов РОССИИ*



**В.М. Анисимов, И.Н. Данилова,  
В.С. Пронина, Г.Э. Солохина**

## **Лабораторные работы по физике ЧАСТЬ 1**

**МЕХАНИКА. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И  
ТЕРМОДИНАМИКА**

Под редакцией проф. Г.Г.Спирина

*Рекомендовано в качестве учебного пособия  
научно-методическим советом по физике при  
Министерстве общего и профессионального  
образования Российской Федерации для студентов  
высших технических учебных заведений*

*Москва*

ББК 16.4.1  
А 67

Рецензенты:  
Нагаев В.Б., Чернышев В.В.

**А 67 Анисимов В.М., Данилова И.Н., Пронина В.С., Солохина Г.Э.**

**Лабораторные работы по физике, ч. 1. Механика.  
Молекулярная физика и термодинамика.**

**ISBN 978-5-903111-19-0**

Лабораторный практикум является необходимой составной частью процесса изучения физики студентами МАИ. Как правило, лабораторные работы выполняются вслед за изучением соответствующего раздела в теоретическом курсе.

Главная цель лабораторного практикума - дать возможность студентам познакомиться с приборами, некоторыми физическими явлениями, овладеть различными методами измерений, научиться технике эксперимента, суметь сделать выводы относительно измеряемых величин или каких-либо функций от них. Результаты измерений должны быть подвергнуты анализу, а также проведена необходимая математическая обработка результатов.

Предназначено для студентов всех факультетов МАИ дневного и вечернего отделений, выполняющих лабораторные работы по физике.

**ББК 16.4.1**

**ISBN 978-5-903111-19-0**

© В.М. Анисимов, И.Н. Данилова,  
В.С. Пронина, Г.Э. Солохина 2010 г.

## СОДЕРЖАНИЕ

СОДЕРЖАНИЕ .....	3
ПРЕДИСЛОВИЕ .....	7
ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ	7
Графическое изображение результатов .....	8
Некоторые измерительные инструменты и приборы .....	10
Погрешности измерений физических величин .....	13
Расчет погрешностей при графической обработке результатов измерений .....	23
Правила приближенных вычислений .....	25
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 0	
Определение плотности твердых тел правильной геометрической формы и расчет погрешностей .....	26
Вопросы по разделу .....	32
РАЗДЕЛ 1 .....	33
<b>Динамика поступательного движения материальной точки.</b>	
<b>Законы сохранения импульса и энергии .....</b>	<b>33</b>
1.1 Динамика поступательного движения. Закон сохранения импульса .....	33
1.2 Энергия, работа, мощность. Закон сохранения энергии .....	36
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 25(ф)	
Определение коэффициента сопротивления жидкой среды .....	38
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 5	
Изучение упругого удара шаров .....	42
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 5а	
Изучение неупругого удара шаров .....	49
Вопросы по разделу 1 .....	54
РАЗДЕЛ 2 .....	55
<b>Вращательное движение твердого тела .....</b>	<b>55</b>
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 7(ф)	
Определение момента инерции диска с отверстием и расчет погрешностей .....	59
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1	
Экспериментальное определение момента инерции вращающейся системы .....	63
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3	
Изучение динамики вращательного движения .....	70
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 6	
Определение момента инерции тела и скорости полета “пули” .....	75
Вопросы по разделу 2 .....	80

Р А З Д Е Л 3-----	81
<b>Механические колебания и волны</b> -----	81
3.1 Незатухающие гармонические колебания. Маятники-----	81
3.2 Затухающие колебания-----	87
3.3 Вынужденные колебания, резонанс-----	89
3.4 Волны-----	91
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2	
Измерение ускорения свободного падения с помощью	
математического и обратного (физического) маятников-----	95
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 012	
Изучение колебаний математического маятника и явления	
параметрического резонанса-----	100
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 8	
Определение момента инерции махового колеса методом	
колебаний-----	106
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 10	
Определение момента инерции твердых тел с помощью	
крутильных колебаний-----	109
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 11	
Определение момента инерции тела при помощи трифилярного	
подвеса-----	114
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 13	
Исследование свободных колебаний пружинного маятника-----	119
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 14	
Исследование крутильных колебаний-----	123
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4	
Изучение затухающих колебаний наклонного маятника-----	126
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 19	
Определение скорости звука в воздухе методом интерференции--	133
Вопросы по разделу 3-----	136
 Р А З Д Е Л 4-----	 137
<b>Основы термодинамики. Теплоемкость вещества</b> -----	137
4.1 Идеальный газ. Первое начало термодинамики-----	137
4.2 Теплоемкость-----	139
4.3 Второе начало термодинамики. Тепловые двигатели-----	145
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 33	
Определение универсальной газовой постоянной-----	148
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 35	
Определение отношения теплоемкостей воздуха при постоянном	
давлении и постоянном объеме методом Клемана - Дезорма-----	151

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 36(к)	
Адиабатический процесс -----	158
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 43	
Определение отношения теплоемкостей воздуха при постоянном давлении и постоянном объеме методом интерференции -----	163
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 44	
Определение отношения теплоемкостей воздуха при постоянном давлении и постоянном объеме резонансным методом -----	167
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 45	
Исследование теплоемкости твердых тел -----	170
Вопросы по разделу 4 -----	175
<b>Р А З Д Е Л 5 -----</b>	<b>177</b>
<b>Распределения Максвелла и Больцмана. Явления переноса---</b>	<b>177</b>
5.1 Распределение Максвелла -----	179
5.2 Распределение Больцмана -----	180
5.3 Физические основы явлений переноса в газах-----	182
5.4 Вывод уравнений переноса на основе молекулярно-кинетической теории газов-----	183
5.5 Зависимость коэффициентов переноса от термодинамических параметров газа -----	189
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 29(к)	
Распределение Максвелла -----	190
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 21	
Определение коэффициента вязкости воздуха капиллярным методом -----	196
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 22	
Исследование явления внутреннего трения при различных режимах течения газа -----	202
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 23	
Определение коэффициента вязкости при течении воздуха в канале-----	206
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 26	
Определение коэффициента вязкости воздуха капиллярным вискозиметром -----	210
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 25	
Определение коэффициента вязкости жидкости по методу Стокса -----	213
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 24	
Определение коэффициента теплопроводности воздуха методом нагретой нити -----	216

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 31	
Изучение зависимости коэффициента теплопроводности воздуха от температуры методом нагретой нити -----	221
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 28	
Определение коэффициента теплопроводности сыпучих тел методом плоского слоя -----	226
Вопросы по разделу 5-----	230
ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ -----	231
Механика-----	231
Молекулярная физика, термодинамика -----	232
ЛИТЕРАТУРА -----	235

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Методический совет кафедры установил обязательное для всех студентов выполнение фронтально-тематических лабораторных работ 1-го уровня.

Данное пособие включает работы, выполняемые на кафедре по разделам “механика”, “молекулярная физика и термодинамика”. В пособие включены как описания и методики работ, выполняемых в лабораториях кафедры, так и работы, предназначенные для выполнения в компьютерном классе. Номера работ, выполняемых в компьютерном классе, помечены буквой «К».

Работы сгруппированы по основным разделам курса физики. В начале каждого раздела приведены основные теоретические сведения. В конце каждого раздела приведены вопросы, знание ответов на которые необходимо для успешного прохождения предварительного компьютерного тестирования с целью получения допуска для выполнения лабораторной работы, а также для сдачи фронтально - тематической лабораторной работы преподавателю.

Кроме того, в пособии приведены типовые вопросы по указанным разделам курса для подготовки к сдаче экзамена.

В создании лабораторного практикума «Механика» участвовали преподаватели кафедры: Волков Б.Н., Коновалова З.И., Лаушкина Л.А., Лобов А.Г., Озолин В.В., Третьякова О.Н.

В формировании лабораторного практикума «Молекулярная физика и термодинамика» принимали участие преподаватели кафедры: Ваничева Н.А., Зайцева Л.С., Сцепуро Н.Г., Тимофеев О.С., Черепанов В.В., Черкасова М.В.

Авторы благодарят старшего лаборанта Егорова А.Н. за полезные замечания при подготовке издания.

## ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

Каждая лабораторная установка 1-го уровня рассчитана на работу подгруппы студентов из 2-х человек.

Эти подгруппы создаются обычно по желанию студентов и фиксируются преподавателем в журнале кафедры физики. Номера лабораторных работ для подгрупп студентов сообщаются преподавателем за 1 - 2 недели до дня работы в лаборатории.

Перед каждым лабораторным занятием студент должен ознакомиться с описанием заданной для выполнения работы, изучить

соответствующий раздел теории и подготовить конспект (в специальном журнале).

Конспект должен содержать:

- 1) номер и название работы;
- 2) краткие теоретические сведения по разделу, к которому относится выполняемая работа;
- 3) схему установки;
- 4) расчетную формулу;
- 5) таблицы для записи результатов измерений.

В начале лабораторного занятия каждый студент должен показать конспект преподавателю и получить разрешение на выполнение работы.

Не имеющий конспекта по неуважительной причине студент к занятиям в лабораторном практикуме не допускается и выполняет работу после представления конспекта преподавателю во внеаудиторное время в соответствии с действующими правилами на кафедре физики МАИ.

Выполняя экспериментальную часть, надо руководствоваться описанием лабораторной работы, а также указаниями преподавателей и лаборанта. После окончания измерений и расчетов необходимо показать полученные результаты преподавателю для проверки и соответствующей отметки в журнале. Электрическую схему установки (если таковая имеется) следует разбирать только после проверки преподавателем полученных результатов.

Каждый студент представляет отчет по выполненной работе. Он включает в себя конспект с заполненной таблицей результатов и указанием единиц соответствующих величин, графики, если они требуются в работе, и расчет погрешности измерений. Отчеты оформляют в специальном журнале для лабораторных работ.

Вопросы теории, относящиеся к теме фронтальной работы 1-го уровня, студенты защищают в вычислительном центре кафедры физики и получают предварительную оценку, которая заносится в журнал кафедры.

После этого студенты представляют отчет по выполненной работе преподавателю группы и после собеседования получают окончательную оценку, которая заносится преподавателем в журнал кафедры.

## Графическое изображение результатов

Как правило, физические зависимости - это гладкие, плавные линии, без резких изломов. Чтобы получить наглядное представление о взаимной связи рассматриваемых величин и их закономерном изменении, результаты экспериментов представляют графически, пользуясь, как правило, прямоугольной системой координат.

Графики выполняют на миллиметровой бумаге. При построении графиков задаются масштабами по вертикальной и горизонтальной осям. Естественно, выбранные масштабы, как правило, различаются. Масштабы должны быть такими, чтобы рационально использовать всю площадь чертежа: график не должен “прижиматься” к оси ординат или абсцисс. Наименьшее, наибольшее и промежуточные значения рассматриваемых величин должны отмечаться на координатных осях. Координатные оси отмечают буквами, обозначающими фиксируемые величины, там же указывают их размерность.

Пример построения графика по экспериментальным данным показан на рис.0.1. Полученные экспериментальные данные наносятся на график в виде точек, кружочков, крестиков и т.д.

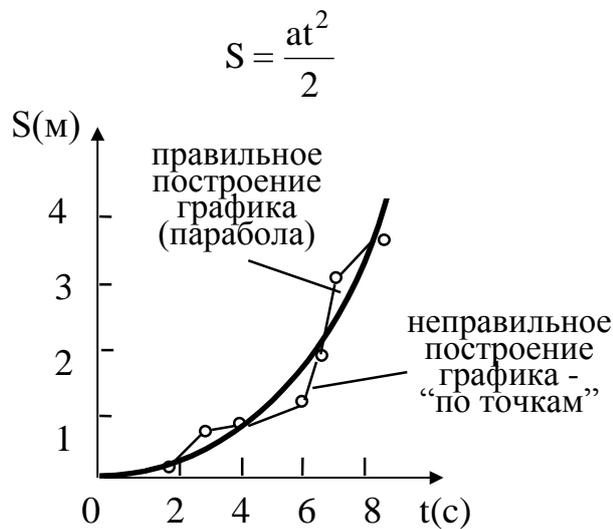


Рис. 0.1

Экспериментальные точки вследствие ошибок измерения не ложатся на кривую (прямую) графической зависимости, а группируются вокруг нее случайным образом. Точки не следует соединять отрезками прямых, получая некую ломаную линию. Необходимо провести гладкие кривые, соответствующие изучаемым физическим зависимостям. Сначала необходимо выяснить, какая имеется зависимость (линейная, степенная, экспоненциальная и т.д.). Затем проводят по точкам усредняющую кривую. Обычно точки не лежат на ней, а имеют некоторый разброс (из-за погрешностей эксперимента), и кривую проводят так, чтобы экспериментальные точки равномерно отклонялись от нее (рис.0.1).

Если на график наносят несколько кривых, то возможно вычерчивать их разноцветными карандашами или показывать разными линиями (сплошная, пунктир, штрих-пунктир...). Сверху графика обычно указывают приведенную на графике зависимость.

## Некоторые измерительные инструменты и приборы

### *Штангенциркуль*

С его помощью измеряют внешние и внутренние размеры тел, глубину отверстий в них. На рис.0.2 изображен один из штангенциркулей. 1 - штанга с делениями ценой в 1 мм, 2 - подвижная часть со шкалой нониуса с ценой деления 0,1 мм, 3 - тела, размеры которых измеряются, 4 - зажимной винт.

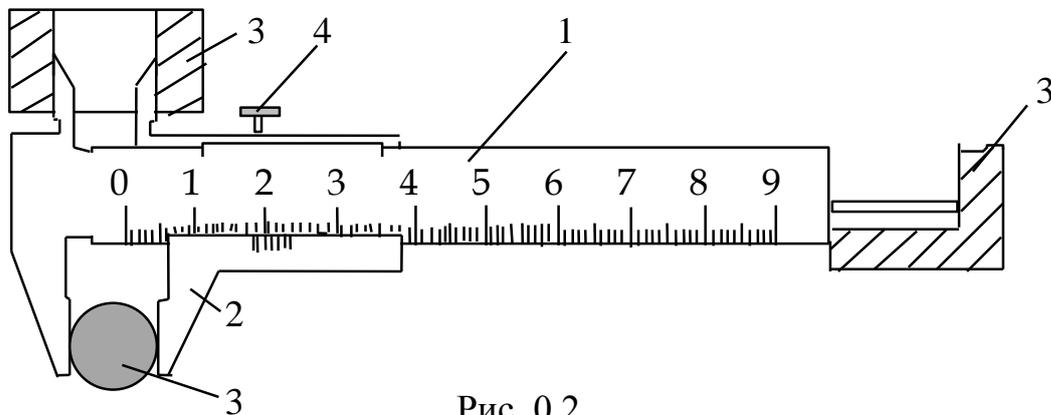


Рис. 0.2

Пример измерения линейного размера показан на рис.0.3:

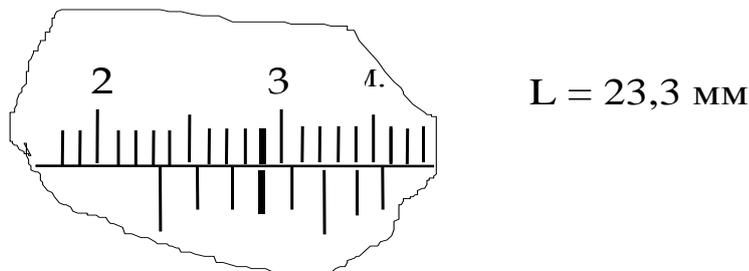


Рис. 03

### Правила измерений

1. Проверить совпадение нуля основной шкалы с нулем нониуса.
2. Измеряемый предмет 3 расположить между губками и сдвинуть рамку до соприкосновения губок с предметом.
3. Винтом 4 закрепить рамку и произвести отсчет.

Измеряемый размер равен целому числу делений основной шкалы на штанге (до нуля нониуса) плюс точность нониуса, умноженная на порядковый номер деления нониуса, совпадающего с одним из делений

на штанге. Если ни одно из делений нониуса не совпадает точно с каким-либо штрихом основной шкалы, то берут то деление, которое ближе всего к делению основной шкалы.

### *Микрометр*

Микрометр служит для измерения небольших внешних линейных размеров с более высокой точностью, чем позволяет штангенциркуль. Применяемые в лаборатории микрометры имеют точность 0,01 мм. Измерительным элементом микрометра служит винтовая пара, которая преобразует небольшие линейные перемещения микрометрического винта в значительные угловые перемещения барабана. Основные детали микрометра: скоба 1 и микрометрический винт 2. Продольное перемещение винта осуществляется барабаном 3. Для точных измерений необходимо, чтобы на измеряемое тело при каждом измерении действовала со стороны винта постоянная сила. Для этого служит специальное устройство, размещенное внутри барабана. Последний при измерениях вращается при помощи трещотки 4, которая при достижении установленного усилия микрометрического винта на измеряемую деталь проворачивается относительно барабана.

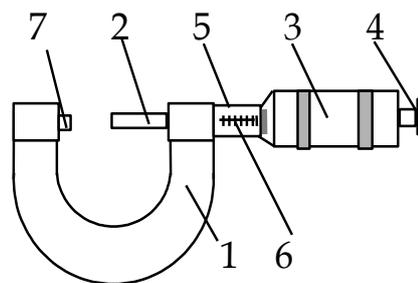


Рис. 0.4

На стебель 5 нанесен продольный штрих 6, снизу от него - миллиметровая шкала, а сверху - штрихи, делящие каждый миллиметр пополам. На барабан нанесена круговая шкала из 50 делений. Один полный оборот барабана соответствует продольному перемещению микрометрического винта на 0.5 мм, а поворот барабана на одно деление - перемещению на 0.01 мм.

Указателями служат для барабана продольный штрих 6 на стебле, а для продольной шкалы - торец барабана.

Указателями служат для барабана продольный штрих 6 на стебле, а для продольной шкалы - торец барабана.

### Правила измерений

1. Проверить микрометр - довести трещоткой винт до упора, при этом на обеих шкалах должно быть нулевое показание.

2. Провести измерение. Для этого поместить измеряемую деталь между микрометрическим винтом 2 и пяткой 7, неподвижно закрепленной в скобе. Вращать трещотку до тех пор, пока микрометр не зажмет измеряемую деталь и трещотка не начнет проворачиваться относительно барабана (при вращении трещотки барабан не вращается).

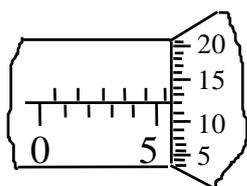


Рис. 0.5

3. Произвести отсчет. Для этого по шкале на стебле определить целое или полуцелое число миллиметров и добавить к нему число сотых долей миллиметра, отчитанное по шкале барабана.

Для примера на рис.0.5 показано положение шкал при измеряемой длине 5.62 мм.

### ***Технические весы***

Весы состоят из основания 1 (рис.0.6), жестко скрепленной с ним колонки 2, в верхней части которой закреплена призма, на которую опирается коромысло 3. К последнему подвешены чашки весов 4.

При уравновешенных весах коромысло устанавливается горизонтально, и прикрепленная к нему стрелка 5 находится против середины шкалы 6.

Винт 7 служит для арретирования весов. Арретирование заключается в том, что особое устройство при повороте винта 7 приподнимает коромысло с призмы и фиксирует его в таком положении. Благодаря этому между взвешиваниями на призму не действуют никакие силы и она меньше изнашивается.

### Подготовка весов к работе.

1. Проверить по отвесу правильность установки весов (вертикальность колонки 2). В случае необходимости добиться вертикальности колонки, вращая установочные винты 9.

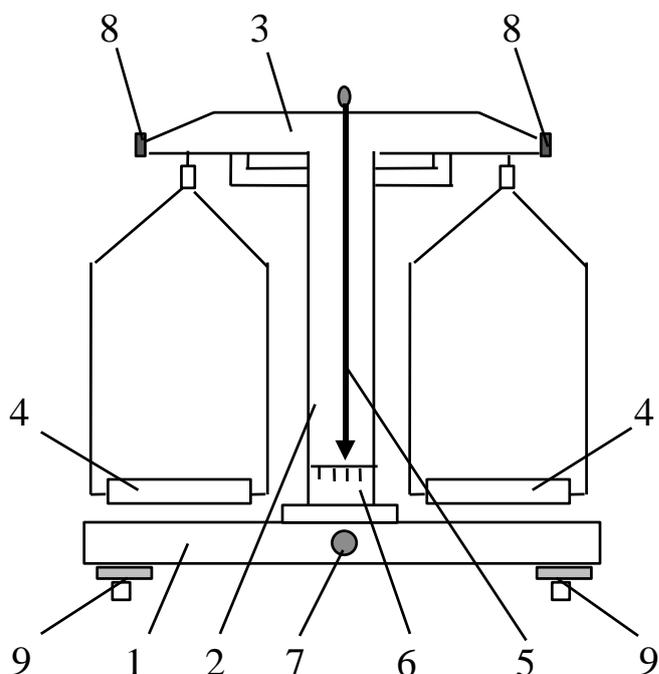


Рис. 0.6

2. Проверить положение стрелки весов 5. Если она не устанавливается при ненагруженных разарретированных весах против середины шкалы 6, то добиться этого следует осторожным вращением регулировочных грузов 8. Вращение производить при арретированных весах.

#### Правила взвешивания

1. Взвешиваемое тело и разновески класть на чашки и снимать с них нужно только при арретированных весах.

2. При взвешивании разновески помещают только на свободную от тела чашку весов. Причем начинать нужно с разновесков большей массы.

3. Пока не достигнуто предварительное равновесие, нельзя полностью разарретировать весы. Поэтому винт 7 поворачивают только частично и, заметив, что стрелка явно уходит в сторону, возвращают винт в исходное положение. После этого меняют вес разновесков в зависимости от направления движения стрелки.

4. Разновески следует ставить так, чтобы их общий центр тяжести приходился на середину чашки.

5. После достижения равновесия весы необходимо заарретировать.

### **Погрешности измерений физических величин**

Измерения являются одной из важнейших задач физического эксперимента.

Измерить какую-либо физическую величину - это значит узнать, сколько раз содержится в ней однородная с ней величина, принятая за единицу измерения.

Измерения бывают прямые и косвенные. При прямых измерениях искомое значение величины находят непосредственно из опытных данных. Например: измерение длины линейкой или штангенциркулем, измерение температуры термометром, силы электрического тока - амперметром.

При косвенных измерениях искомое значение величины находят на основании известной зависимости между этой величиной и величинами, получаемыми прямыми измерениями. Например, определение плотности тела по измерениям его массы и геометрических размеров.

#### **Прямые измерения**

В зависимости от причин, их вызывающих, ошибки измерения делят на случайные, систематические и грубые (промахи).

Под случайными ошибками понимают ошибки, значения которых меняются от одного измерения к другому. Величина их не может быть установлена до опыта. Их возникновение вызвано неточностью измерения (случайными ошибками экспериментатора, неточным соблюдением методики измерения и т.д.) и непостоянством самой измеряемой величины (например, диаметра цилиндра или толщины пластины).

Систематическая погрешность - это составляющая погрешности измерения, остающаяся постоянной или закономерно изменяющаяся при повторных измерениях одной и той же величины. Она может быть учтена или исключена изменением метода измерения, введением поправок к показаниям приборов, учетом систематического влияния внешних факторов и т.п. Например: поправка, связанная с изменением длины измерительной линейки и тела в результате теплового расширения; поправка, связанная с потерей веса при взвешивании в воздухе, величина которой зависит от температуры, влажности воздуха и атмосферного давления.

Исключение систематических погрешностей всегда связано с дополнительными расчетами или измерениями.

Грубые ошибки (промахи) являются также случайными, однако их характер существенно отличается от характера случайных ошибок измерения. Если случайные ошибки измерения возникают при исправно работающей аппаратуре и правильных действиях экспериментатора, то причиной грубых ошибок являются неисправность измерительной техники или ошибки в работе экспериментатора. Поэтому, когда грубые ошибки значительны, они обнаруживаются без большого труда и этот результат должен быть исключен.

Основным объектом изучения теории ошибок являются случайные ошибки при отсутствии систематических ошибок. Если какая-либо величина измеряется в одинаковых условиях несколько раз, то возникает необходимость в статистической обработке результатов измерений этой величины, чтобы учесть и оценить случайные ошибки. Основным математическим аппаратом для статистических методов обработки результатов является теория вероятностей и математическая статистика.

Обозначим  $x_0$  не известное нам точное значение измеряемой величины.

Произведя  $n$  измерений, получим  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  - значения измеряемой величины, которые называются результатами наблюдений. Величины  $x_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ) отличаются друг от друга и от  $x_0$ . Если величины  $x_i$  измерены с одинаковой точностью, то для оценки  $x_0$

применяют среднее арифметическое значение результатов наблюдений:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}. \quad (0.1)$$

Среднее арифметическое  $\bar{x}$  называется результатом измерений. Поскольку величины результатов наблюдений  $x_i$  носят случайный характер, то результат измерения – величина  $\bar{x}$  – тоже будет случайной величиной; и отклонения от  $\bar{x}$  результатов наблюдения  $x_i$  будут случайными:

$$\Delta x_i = x_i - \bar{x}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (0.2)$$

Следует отметить, что величина  $\Delta x_i$  значительно меньше величины  $x_i$ . При большом числе измерений влияние каждого отдельного результата наблюдения  $x_i$  на величину  $\bar{x}$  примерно равноценно.

Абсолютная погрешность результата измерений  $\Delta x$ , равная отклонению  $\bar{x}$  от  $x_0$ , тоже будет величиной случайной:

$$\Delta x = x_0 - \bar{x}. \quad (0.3)$$

Так как величина  $x_0$  нам не известна, оценим величину  $\Delta x$  через  $\Delta x_i$ .  $\Delta x$  состоит из многих случайных величин  $\Delta x_i$ , из которых ни одна не доминирует над остальными. При этом условии случайные погрешности  $\Delta x_i$  подчиняются нормальному закону распределения Гаусса, который справедлив при следующих предположениях:

1) погрешности измерений могут принимать непрерывный ряд значений;

2) появление равных по величине, но противоположных по знаку случайных погрешностей равновероятно;

3) малые случайные погрешности обладают большей вероятностью появления, чем большие.

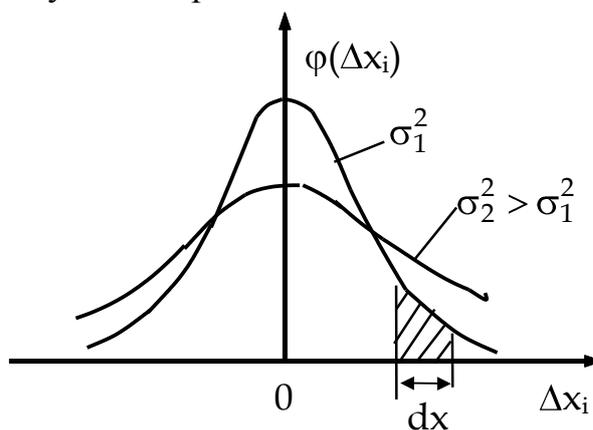


Рис. 0.7

Закон нормального распределения характеризуется кривыми, представленными на рис.0.7. Вид кривых отражает эти три условия.

По оси абсцисс отложена величина случайной погрешности  $\Delta x_i$ , по оси ординат - значения функции  $\varphi(\Delta x_i)$ , характеризующей вероятность появления данной погрешности. Функция  $\varphi(\Delta x_i)$  называется

плотностью распределения вероятности ошибки  $\Delta x_i$  или функцией Гаусса и имеет вид

$$\varphi(\Delta x_i) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\Delta x_i^2}{2\sigma^2}}. \quad (0.4)$$

Произведение  $\varphi(\Delta x_i)$  на  $dx$  - длину интервала  $(\Delta x_i, \Delta x_i + dx)$ , равное заштрихованной площади на рис.0.7, дает вероятность  $dw$  того, что величина ошибки заключена между  $\Delta x_i$  и  $\Delta x_i + dx$ , то есть

$$dw = \varphi(\Delta x_i) \cdot dx. \quad (0.5)$$

Доверительная вероятность  $w$  выражается в процентах или долях единицы и задается экспериментатором. В лабораторном практикуме обычно достаточно  $w = 0.9 = 90\%$ .

Соотношение (0.5) справедливо, если функция  $\varphi(\Delta x_i)$  подчиняется условию нормировки:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\Delta x_i) \cdot dx = 1. \quad (0.6)$$

Равенство (0.6) означает следующее: вероятность того, что погрешность измерения будет заключаться в интервале  $(-\infty, +\infty)$ , равна единице. Это соответствует равенству единице всей площади под кривой Гаусса.

В формуле (0.4):

$e$  - основание натуральных логарифмов;

$\sigma^2$  - дисперсия случайной величины;

$\sigma$  - среднее квадратическое отклонение результата наблюдения.

Дисперсия (рассеяние)  $\sigma^2$  характеризует разброс значений  $x_i$  относительно  $x_0$ . Чем меньше  $(x_i - x_0)$ , тем меньше дисперсия, тем точнее измерения. Дисперсия  $\sigma^2$  характеризует быстроту уменьшения вероятности появления погрешности  $\Delta x$  с ростом этой погрешности, то есть при большей дисперсии (рис.0.7) кривая нормального распределения расплывается, менее ярко выражен максимум, больше вероятность больших отклонений.

Так как истинное значение  $x_0$  неизвестно, оценкой дисперсии  $\sigma^2$  является так называемая дисперсия результата серии из  $n$  измерений. При ограниченном числе измерений ее приближенное значение можно определить по формуле

$$\bar{\sigma}_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\Delta x_i)^2}{n(n-1)}. \quad (0.7)$$

Наиболее точно нормальный закон распределения ошибок характеризуется среднеквадратичной ошибкой. Среднеквадратичная погрешность серии измерений

$$\bar{\sigma}_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\Delta x_i)^2}{n(n-1)}}. \quad (0.8)$$

Все эти формулы тем справедливее, чем больше число измерений.

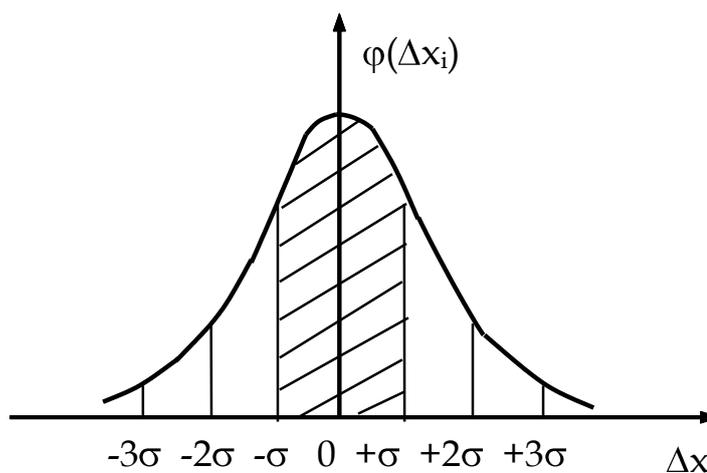


Рис. 0.8

На рис.0.8 показана кривая нормального распределения с указанием  $\pm \sigma$ ,  $\pm 2\sigma$ ,  $\pm 3\sigma$ . Например, доверительная вероятность интервала  $(x_i - \sigma, x_i + \sigma)$  - заштрихованная площадь под кривой Гаусса – равна 0.68. Это означает, что при достаточно большом числе измерений примерно 68% их приведет к результатам, отличающимся от истинного не более, чем на  $\pm \sigma$ . Для доверительного интервала  $(x_i - 2\sigma, x_i + 2\sigma)$  доверительная вероятность будет составлять 0.95, а для интервала  $(x_i - 3\sigma, x_i + 3\sigma)$  – 0.997.

Записывается это с указанием доверительной вероятности:

$$\begin{aligned} x_i; \Delta x_i \text{ от } -\sigma \text{ до } +\sigma; w &= 0.68 \\ x_i; \Delta x_i \text{ от } -2\sigma \text{ до } +2\sigma; w &= 0.95 \\ x_i; \Delta x_i \text{ от } -3\sigma \text{ до } +3\sigma; w &= 0.997. \end{aligned} \quad (0.9)$$

Для экспериментов в лабораторном практикуме характерно небольшое число измерений одной величины (3...5).

В 1908 г. В. Госсет (псевдоним “Стьюдент”) доказал, что статистический подход справедлив и при малом числе измерений.

На рис.0.9 приведено сопоставление распределений Гаусса и Стьюдента (----- - кривая распределения Гаусса, ..... - кривая распределения Стьюдента). Распределение Стьюдента при числе измерений  $n \rightarrow \infty$  (начиная, примерно, с  $n = 20$ ) переходит в распределение Гаусса, а при малом числе измерений мало отличается от него.

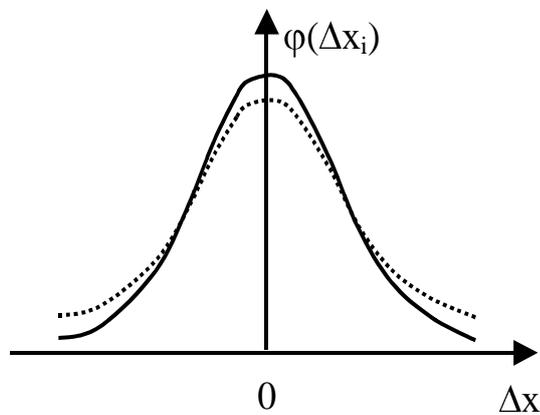


Рис. 0.9

Доверительную границу погрешности  $\Delta x$  для заданной  $w$  и при малом  $n$  определяют по формуле

$$\Delta x_{гр} = t_{w,n} \cdot \bar{\sigma}_{\bar{x}}, \quad (0.10)$$

где  $t_{w,n}$  - коэффициент Стьюдента, зависящий от доверительной вероятности и числа измерений, находится по табл. 0.1 для заданных  $w$  и  $n$ .

Таблица 0.1

Значения коэффициента Стьюдента

n	w			n	w		
	0.9	0.95	0.99		0.9	0.95	0.99
2	6.3	12.7	63.7	7	1.9	2.4	3.7
3	2.9	4.3	9.9	8	1.9	2.4	3.5
4	2.4	3.2	5.8	9	1.9	2.3	3.4
5	2.1	2.8	4.6	10	1.8	2.2	3.2
6	2.0	2.6	4.0	11	1.8	2.2	3.1

Обычно в лабораторных работах считается достаточной доверительная вероятность  $w = 0.9$ .

Окончательный результат представляется в виде:

$$\bar{x}; \Delta x_{гр} \text{ от } (-t_{w,n} \cdot \bar{\sigma}_{\bar{x}}) \text{ до } (+t_{w,n} \cdot \bar{\sigma}_{\bar{x}}); w, \quad (0.11)$$

что означает: измеряемая величина принадлежит интервалу значений  $(\bar{x} - t_{w,n} \bar{\sigma}_{\bar{x}}; \bar{x} + t_{w,n} \bar{\sigma}_{\bar{x}})$  с доверительной вероятностью  $w$ .

В итоге измерений и вычислений получают число, в котором различают цифры: верные, не содержащие ошибок, и сомнительные, в которых содержатся ошибки.

Абсолютная ошибка  $\Delta x = t_{w,n} \bar{\sigma}_x$  показывает, в каком знаке этого числа содержится неточность. Поэтому абсолютная ошибка округляется до одной значащей цифры.

В окончательном результате оставляют все верные цифры и одну сомнительную. В промежуточном результате пишут еще одну цифру, что дает возможность точнее округлить окончательный результат.

Для сравнения точности измерений величин обычно вычисляется относительная погрешность

$$\delta = \frac{\Delta x_{\text{гр}}}{\bar{x}} \cdot 100\% . \quad (0.12)$$

По величине относительной погрешности удобно сравнивать и результаты измерений однородных величин.

При прямых измерениях может оказаться, что результаты отдельных измерений одинаковы, и тогда  $\Delta x_i = 0$ . В этом случае доверительная граница погрешности прямых измерений определяется *погрешностью прибора*.

Систематическая составляющая погрешности прибора  $\Delta_c$  (связанная, например, со смещением начала отсчета шкалы, с неравномерностью нанесения штрихов шкалы и т.п.) может быть исключена введением соответствующих поправок к показаниям используемого прибора, полученных сравнением с эталонным.

Случайная составляющая погрешности прибора  $\dot{\Delta}$  (погрешность вследствие трения в деталях прибора, ошибки “мертвого хода” его подвижных частей, погрешность округления при отсчете по шкале прибора и т.п.) неотличима от прочих случайных погрешностей измерения.

Суммарная погрешность прибора обычно задается величиной предельной погрешности  $\Delta$ , указанной в его паспорте или нанесенной на шкалу прибора. Если представляется возможность исключить систематическую составляющую погрешности сравнением с эталоном, то за случайную составляющую погрешности прибора принимают  $\dot{\Delta} \approx \Delta$ .

Если же исключить систематическую погрешность прибора по каким-либо соображениям не удастся, то ее необходимо учесть, расширив соответствующим образом границу доверительного интервала. За величину  $\Delta_c$  приходится принимать  $\Delta_c \approx \Delta$ , так как доля ее в суммарной погрешности неизвестна.

Иногда предельная погрешность задается классом точности прибора  $\delta = \frac{100\Delta}{x_N}$ , где  $x_N$  равно максимальному значению рабочей

части шкалы. Тогда предельная погрешность  $\Delta = \frac{x_N \cdot \delta}{100}$ . Например:

класс точности милливольтметра  $\delta = 0.5$ , максимальное значение рабочей части его шкалы  $x_N = 150$  мВ. Тогда  $\Delta = 0.005 \cdot 150$  мВ = 0.75 мВ и постоянна для всей шкалы прибора.

Если в паспорте и на шкале прибора нет указаний о величине  $\Delta$ , то за  $\Delta$  принимают половину цены наименьшего деления шкалы или целое деление, если они трудно различимы.

В случае однократных или повторных измерений величины  $x_0$  с совпадающими результатами при нормальном распределении случайной погрешности прибора  $\Delta$  доверительная граница рассчитывается по формуле

$$(\Delta x_{гр})_{пр} = k_w \frac{\Delta}{3}, \quad (0.13)$$

где  $k_w$  - коэффициент, зависящий от значения доверительной вероятности  $w$ ;  $\Delta$  - абсолютная максимальная погрешность прибора, определяемая его классом точности либо половиной цены его наименьшего деления.

Значения коэффициента  $k_w$  для различной доверительной вероятности  $w$  приведены в табл.0.2.

Таблица 0.2

w	0.9	0.95	0.99	0.997
$k_w$	1.645	1.960	2.576	3.000

В общем случае, если значение доверительной границы случайной погрешности прямых измерений оказывается сравнимым со значением доверительной погрешности прибора, результирующая доверительная погрешность прямого измерения находится из выражения

$$\Delta x_{гр} = \sqrt{\left( t_{w,n} \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \Delta x_i^2}{n(n-1)}} \right)^2 + \left( k_w \frac{\Delta}{3} \right)^2}. \quad (0.14)$$

Минимальное значение погрешности измерений есть приборная погрешность.

Результат измерений представляют в виде доверительного интервала

$$\bar{x}; \Delta x \text{ от } -\Delta x_{\text{гр}} \text{ до } +\Delta x_{\text{гр}}; w = 0.9.$$

### Косвенные измерения

Обычно приходится вычислять искомую величину по результатам измерений других величин, связанных с этой величиной определенной функциональной зависимостью. Такие измерения называются косвенными. Например, плотность тела (пластины)  $\rho$  определяется через массу тела и его объем:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{L \cdot b \cdot h},$$

где  $L, b, h$  - линейные размеры пластины.

Величины  $m, L, b, h$  можно измерить, а затем вычислить плотность  $\rho$ .

Итак, чаще всего искомая величина является функцией нескольких переменных:

$$A = f(x, y, z, \dots) \quad (0.15)$$

Если величины  $x, y, z, \dots$  случайны, то  $A$  тоже будет случайной величиной.

Из теории вероятностей известно, что среднее значение функции случайной величины приближенно равно функции от средних значений ее аргументов при условии, что погрешности измерений аргументов  $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \dots$  малы по сравнению с величинами  $x, y, z, \dots$ , то есть

$$\bar{A} = f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots), \quad (0.16)$$

где  $\bar{A}$  - среднее значение величины  $A$ ,  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots$  - средние значения величин  $x, y, z, \dots$  (см формулу 0.1).

Для оценки доверительной границы случайной погрешности косвенного измерения применяют формулу:

$$\Delta A_{\text{гр}} = \sqrt{\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)_{x=\bar{x}}^2 \Delta x_{\text{гр}}^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)_{y=\bar{y}}^2 \Delta y_{\text{гр}}^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)_{z=\bar{z}}^2 \Delta z_{\text{гр}}^2 + \dots} \quad (0.17)$$

где  $\Delta x_{\text{гр}}, \Delta y_{\text{гр}}, \Delta z_{\text{гр}}, \dots$  - доверительные границы случайных погрешностей величин  $x, y, z, \dots$  при одинаковой  $w$ ;  $\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)_{x=\bar{x}}$ ,

$\left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)_{y=\bar{y}}$ ,  $\left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)_{z=\bar{z}}$ , ... - частные производные функции  $A$  по  $x, y, z, \dots$ , вычисленные при  $x = \bar{x}, y = \bar{y}, z = \bar{z}, \dots$

Относительная величина случайной погрешности косвенного измерения определяется в этом случае как

$$\delta_{\bar{A}} = \frac{\Delta A_{\text{гр}}}{\bar{A}} \cdot 100\%. \quad (0.18)$$

Если распределения величин  $x_i, y_i, z_i, \dots$  нормальные ( $i$  - порядковый номер измерения), то распределение величины  $A_i$  тоже будет нормальным, поэтому для определения доверительной границы случайной погрешности косвенного измерения  $\Delta A_{\text{гр}}$  можно применить метод обработки случайных погрешностей прямых измерений.

Для этого найдем значения

$$\bar{A} = f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots) \quad \text{и} \quad A_i = f(x_i, y_i, z_i, \dots) \quad (0.19)$$

для каждого номера измерений.

Аналогично формуле (0.2) находят величины  $\Delta A_i$ :

$$\Delta A_i = A_i - \bar{A}. \quad (0.20)$$

Оценкой средней квадратической погрешности величины  $A$  аналогично формулам (0.8) и (0.10) будет

$$\bar{\sigma}_{\bar{A}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\Delta A_i)^2}{n(n-1)}}, \quad (0.21)$$

если случайные погрешности заведомо больше приборных.

Доверительная погрешность  $\Delta A_{\text{гр}}$  при малом числе измерений (расчетов):

$$\Delta A_{\text{гр}} = t_{w,n} \bar{\sigma}_{\bar{A}} = t_{w,n} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\Delta A_i)^2}{n(n-1)}}, \quad (0.22)$$

где  $t_{w,n}$  - коэффициенты Стьюдента (см. табл.0.1) для заданных  $w$  и  $n$ .

Результат косвенного измерения величины  $A$  представляется в форме

$$A; \Delta A \text{ от } (-t_{w,n} \cdot \bar{\sigma}_{\bar{A}}) \text{ до } (+t_{w,n} \cdot \bar{\sigma}_{\bar{A}}); w. \quad (0.23)$$

После этого по формуле (0.18) находится относительная величина случайной погрешности.

В случае, если  $A = f(x, y, z, \dots)$  - логарифмируемая функция, то относительная погрешность может быть определена из следующих соображений: так как  $\frac{1}{A} \cdot \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{1}{\partial x} \cdot \frac{\partial A}{A} = \frac{\partial(\ln A)}{\partial x}$ , то

$$\delta_{\bar{A}} = \sqrt{\left[ \frac{\partial(\ln A)}{\partial x} \right]_{x=\bar{x}}^2 \Delta x_{\text{гр}}^2 + \left[ \frac{\partial(\ln A)}{\partial y} \right]_{y=\bar{y}}^2 \Delta y_{\text{гр}}^2 + \left[ \frac{\partial(\ln A)}{\partial z} \right]_{z=\bar{z}}^2 \Delta z_{\text{гр}}^2 + \dots} \quad (0.24)$$

## Расчет погрешностей при графической обработке результатов измерений

В лабораторных работах 1, 2, 3, 11, 22, 23, 27, 44, 45 значения определяемых величин рассчитываются по угловому коэффициенту наклона  $k$  прямолинейного графика, построенного по экспериментальным точкам, к оси абсцисс. Прямую проводят таким образом, чтобы точки находились как можно ближе к ней. Соответствующая процедура в статистике называется линейной регрессией и сводится к определению коэффициентов  $k$  и  $b$  линейной зависимости вида  $y = kx + b$  по совокупности результатов наблюдений  $x_1, y_1; x_2, y_2; \dots x_n, y_n$ .

Расчет коэффициентов выполняется с помощью метода наименьших квадратов по формулам

$$k = \frac{\overline{xy} - (\bar{x})(\bar{y})}{(\overline{x^2}) - (\bar{x})^2} \quad (0.25)$$

$$b = \frac{(\overline{x^2})\bar{y} - \bar{x}(\overline{xy})}{(\overline{x^2}) - (\bar{x})^2} \quad (0.26)$$

Здесь  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  – средние арифметические значения величин  $x$  и  $y$  (см. формулу (0.1)),  $\overline{xy}$  и  $\overline{x^2}$  для  $n$  измерений могут быть рассчитаны следующим образом

$$\overline{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{n}; \quad \overline{x^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} .$$

Для графика, построенного по коэффициентам, найденным по формулам (0.25) и (0.26), сумма квадратов расстояний по ординате от прямой до точек с координатами  $x_i$  и  $y_i$  оказывается наименьшей. При

вычислении этой суммы индекс  $i$  последовательно принимает значения от 1 до  $n$ , где  $n$  - количество пар  $x_i, y_i$  результатов наблюдений.

Если графическая обработка результатов проведена достаточно аккуратно, то построенный график оказывается близким к оптимальному, а угловой коэффициент наклона графика  $\Delta y / \Delta x$  мало отличается от коэффициента  $k$ , рассчитанного по методу наименьших квадратов. В этом случае для оценки погрешностей углового коэффициента наклона графика ( $k$ ) и ординаты точки пересечения его с вертикальной осью ( $b$ ) допустимо использовать выражения, применяемые при статистической обработке результатов по методу наименьших квадратов.

Среднее квадратическое отклонение углового коэффициента наклона графика  $k$  и коэффициента  $b$ :

$$\sigma_k = \frac{\sigma_0}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}, \quad (0.27)$$

$$\sigma_b = \sigma_0 \sqrt{\bar{x}^2}. \quad (0.28)$$

Здесь  $\sigma_0 = \sqrt{y_0}$ , а  $y_0$  - оценка среднего квадрата отклонения по ординате результатов наблюдений  $y_i$  от величин, рассчитанных по формуле  $y = kx + b$  с помощью вычисленных по методу наименьших квадратов коэффициентов:

$$y_0 = \frac{1}{(n-2)} \sum_{i=1}^n [y_i - (kx_i + b)]^2. \quad (0.29)$$

При графической обработке  $y_0$  - это сумма квадратов вертикальных отклонений результатов наблюдений от построенной прямой, деленная на  $(n-2)$ . Если делить на число наблюдений  $n$ , то получается заниженная, т.е. смещенная оценка среднего квадрата отклонения. Величина  $y_0$  не зависит от количества наблюдений  $n$ , а  $\sigma_k$ , как следует из выражения (0.27), должна уменьшаться с возрастанием  $n$ . Для уменьшения погрешности величины  $k$  следует стремиться к увеличению ширины интервала значений  $x$ , это видно из формулы (0.27).

Если график отличается от оптимального, то сумма квадратов отклонений экспериментальных точек от прямой не будет наименьшей, возрастут величины  $y_0$  и  $\sigma_k$ , как того и следует ожидать.

Доверительная граница случайной погрешности и относительная погрешность вычисляются по известным формулам (0.10) и (0.12):

$$\Delta k_{\text{гр}} = t_{w,n} \sigma_k; \quad \delta k = \frac{\Delta k_{\text{гр}}}{k} 100\%, \quad (0.30)$$

где  $t_{w,n}$  - коэффициент Стьюдента, определяемый по табл.0.1.

В некоторых работах требуется по графику определить координату  $x_0$  точки пересечения графика с горизонтальной осью. Если коэффициенты  $k$ ,  $b$  и их граничные погрешности определены, то  $x_0 = -\frac{b}{k}$ ,  $\Delta x_0$  рассчитывается, как погрешность косвенных измерений:

$$\Delta x_{0_{гр}} = x_0 \sqrt{\left(\frac{\Delta b_{гр}}{b}\right)^2 + \left(\frac{\Delta k_{гр}}{k}\right)^2}. \quad (0.31)$$

Суммируя вышесказанное, приведем краткие рекомендации по расчету погрешностей графического метода определения коэффициентов  $k$  и  $b$  линейной зависимости  $y = kx + b$ .

1. Выбрать масштабы по осям так, чтобы разность максимальных и минимальных значений каждой величины была не менее 10 см.

2. Изобразить экспериментальные данные на графике точками, кружками или крестиками и провести прямую между точками так, чтобы расстояния от нее до экспериментальных точек были как можно меньше.

3. Выбрать на построенной прямой две достаточно удаленные друг от друга точки с координатами  $x_l, y_l, x_h, y_h$  и рассчитать коэффициент  $k$  по формуле:

$$k = \frac{y_h - y_l}{x_h - x_l}.$$

4. Если необходимо, определить коэффициенты  $b$  и  $x_0$  – ординату и абсциссу точек пересечения прямой с ОУ и ОХ.

5. Измерить вертикальные отклонения экспериментальных точек от графика с учетом масштаба и определить величину  $y_0$  по формуле (0.29).

6. Рассчитать среднее отклонение  $\sigma_k$  найденного углового коэффициента наклона  $k$  по формуле (0.27) и его граничную погрешность  $\Delta k_{гр}$  по формуле (0.30).

7. Если требуется, определить погрешности коэффициентов  $b$  и  $x_0$  по формулам (0.28) и (0.31).

## Правила приближенных вычислений

При физических измерениях принято писать только значащие цифры, особенно в окончательном результате. При этом принято считать, что разряд сомнительной цифры числа совпадает с разрядом первой значащей цифры его абсолютной погрешности.

Числовые результаты удобно представлять следующим образом: ставить запятую после первой отличной от нуля цифры, а все число умножить на соответствующую степень десяти. Например:  $21\ 000 = 2,1 \cdot 10^4$ ;  $0,00015 = 1,5 \cdot 10^{-4}$ .

Нуль в последнем разряде после запятой следует сохранять, если это верная или сомнительная цифра, незначащие нули отбрасывают.

Чтобы приближенно найти количество значащих цифр в числах, необходимо пользоваться следующими правилами:

1. Сложение и вычитание. Разряд сомнительной цифры суммы совпадает со старшим из разрядов сомнительных цифр всех слагаемых.

2. Умножение, деление, возведение в степень и извлечение корня. Результат любого из этих действий содержит столько значащих цифр, сколько их в исходном данном с наименьшим количеством значащих цифр.

3. Логарифмирование. Некоторое число и мантисса его логарифма содержат одинаковое количество значащих цифр.

4. Округление. Перед тем, как приступить к выполнению действия, нужно при помощи правил 1...3 определить количество значащих цифр (или разряд сомнительной цифры) результата и округлить исходные данные. После выполнения действия необходимо округлить результат, сохранив в нем только значащие цифры.

5. Правило запасной цифры. Чтобы по возможности уменьшить ошибки округления, рекомендуется в тех исходных данных, которые это позволяют, а также и в результате, если он будет использоваться в дальнейших вычислениях, сохранить по одной лишней (запасной) цифре сверх того, что требуют правила 1...4.

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 0

### Определение плотности твердых тел правильной геометрической формы и расчет погрешностей

#### Приборы и оборудование:

- 1) штангенциркуль
- 2) микрометр
- 3) технические весы
- 4) разновески
- 5) полый цилиндр, или прямоугольная пластина, или цилиндр переменного диаметра.

## Методика измерений

Плотностью тела называется величина, измеряемая массой вещества, заключенной в единице объема тела.

Средняя плотность выражается формулой

$$\rho = \frac{m}{V}, \quad (0.32)$$

где  $m$  - масса тела,  $V$  - объем тела. Единицей плотности является  $1 \text{ кг/м}^3$ .

Масса - физическая величина, одна из основных характеристик материи, определяющая ее инерционные и гравитационные свойства.

По второму закону динамики Ньютона

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad (0.33)$$

масса тела  $m$  является коэффициентом пропорциональности между силой  $\vec{F}$ , действующей на тело, и ускорением  $\vec{a}$ , которое получает тело под действием этой силы. Чем больше масса тела, тем меньше ускорение, которое оно приобретает, то есть чем больше масса, тем больше требуется времени для изменения скорости тела на определенную величину. В этом и заключается инертность, как свойство тел: скорость любого тела не может быть изменена мгновенно, всегда для этого требуется некоторое время, то есть масса является мерой инертности тела, и поэтому она называется инертной массой.

Масса есть величина, обладающая свойством аддитивности: если известны массы частей тела  $m_1, m_2, m_3, \dots$ , то масса этого тела будет равна их сумме:

$$m = m_1 + m_2 + m_3 + \dots \quad (0.34)$$

Масса - величина скалярная. Она характеризует не только способность тела приобретать ускорение в результате воздействия на него другого тела, то есть является не только мерой инертности тела, но и мерой количества вещества, заключенного в нем.

Наряду с перечисленными выше свойствами масса характеризует и гравитационные свойства тел. В теории гравитации Ньютона масса выступает как источник поля тяготения. Каждое тело создает поле тяготения, пропорциональное массе тела, и испытывает воздействие поля тяготения, создаваемого другими телами, сила которого также пропорциональна массе. Согласно закону всемирного тяготения, две точечные массы  $m_1$  и  $m_2$  притягиваются друг к другу силой, пропорциональной их массам и обратно пропорциональной квадрату расстояния  $r$  между центрами масс:

$$|\vec{F}| = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (0.35)$$

где  $\gamma$  - гравитационная постоянная, определяемая опытным путем, равная  $6.67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/(\text{кг} \cdot \text{с}^2)$ .

Частным случаем гравитационной силы является сила тяжести  $F = mg_0$ . Обозначим массу Земли  $M$ , ее радиус  $R$ , массу данного тела  $m$ , тогда сила, действующая на тело вблизи поверхности Земли по второму закону Ньютона

$$F = \gamma \frac{Mm}{R^2} = mg_0, \quad (0.36)$$

где  $g_0 = \gamma \frac{M}{R^2}$  является ускорением свободного падения у поверхности Земли.

В соответствии с принципом эквивалентности инертная и гравитационная массы численно равны.

Силу тяжести можно измерять на весах, так как она примерно равна весу тела. Весом тела называют силу, с которой тело вследствие его притяжения к Земле действует на связь (опору или подвес). Поэтому можно определять массу тела взвешиванием на рычажных весах. На рычажных весах сравнивают веса тела и разновесков. Когда весы уравновешены, можно утверждать, что вес тела равен весу разновесков. Но если равны веса, то равны и их массы. Так как на разновесках указаны именно массы, то массу тела мы определяем, просто сложив числа, указанные на разновесках.

### Порядок выполнения работы

#### I. Тело - полый цилиндр (рис.0.10).

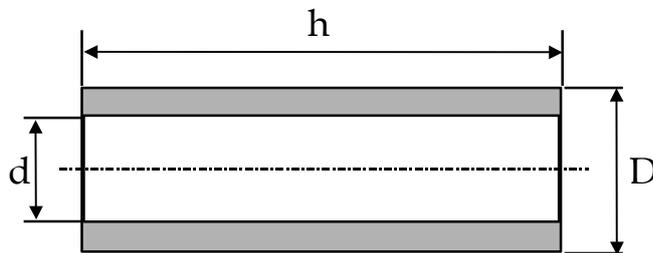


Рис. 0.10

Плотность  $\rho$  вещества цилиндра определяется по формуле

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{4m}{\pi(D^2 - d^2) \cdot h}. \quad (0.37)$$



1. Определить исправность штангенциркуля. Для этого привести в соприкосновение его губки и убедиться в совпадении нулевой точки нониуса с нулем масштабной линейки штангенциркуля.

2. Измерить штангенциркулем высоту  $h$ , наружный  $D$  и внутренний  $d$  диаметры цилиндра 3...5 раз в разных плоскостях.

3. Определить массу  $m$  цилиндра трехкратным взвешиванием на технических весах.

4. Результаты измерений занести в табл.0.3.

5. Вычислить среднюю плотность  $\bar{\rho}$  вещества по формуле

$$\bar{\rho} = \frac{4\bar{m}}{\pi(\bar{D}^2 - \bar{d}^2) \cdot \bar{h}}, \quad (0.38)$$

где  $\bar{m}, \bar{d}, \bar{D}$  – средние значения величин.

Плотность находить в  $\text{г/см}^3$  и  $\text{кг/м}^3$ .

6. Вычислить доверительную и относительную погрешности измерения по формулам (0.17) и (0.18).

## II. Тело - сплошной цилиндр переменного сечения (рис.0.11).

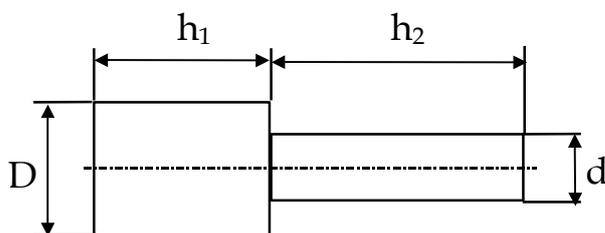


Рис. 0.11

Плотность  $\rho$  вещества цилиндра определяется по формуле

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{4m}{\pi(D^2 h_1 + d^2 h_2)}. \quad (0.39)$$

1. Проверить исправность штангенциркуля. Для этого привести в соприкосновение его губки и убедиться в совпадении нулевой отметки нониуса и штангенциркуля.

2. Измерить штангенциркулем диаметры  $D$  и  $d$  и высоты  $h_1$  и  $h_2$  три раза в разных плоскостях. Результаты занести в табл.0.4.

3. Трехкратным (меняя чашки весов) взвешиванием определить массу цилиндра с помощью технических весов.

4. Вычислить среднюю плотность материала цилиндра по формуле

$$\bar{\rho} = \frac{4\bar{m}}{\pi(\bar{D}^2\bar{h}_1 + \bar{d}^2\bar{h}_2)}, \quad (0.40)$$

где  $\bar{m}, \bar{d}, \bar{D}, \bar{h}_1, \bar{h}_2$  – средние значения величин.

Плотность находят в  $\text{г/см}^3$  и  $\text{кг/м}^3$ .

5. Вычислить доверительную и относительную погрешность измерений по формулам (0.17) и (0.18).

### Ш. Тело - прямоугольная пластина (рис.0.12).

Плотность  $\rho$  вещества пластины определяется по формуле

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{L \cdot b \cdot h}. \quad (0.41)$$

Для определения размеров прямоугольной пластины пользуются штангенциркулем и микрометром.

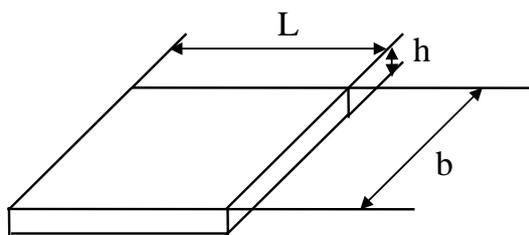


Рис. 0.12

1. Измерить длину  $L$  и ширину  $b$  пластины штангенциркулем (в разных сечениях).

2. Проверить исправность микрометра. Для этого надо конец 4 микрометрического винта совместить с упором 3 и выяснить, совпадает ли нулевое деление основной неподвижной шкалы с нулевым делением круговой шкалы (рис.0.4).

3. Определить цену деления микрометрического винта и круговой шкалы.

4. Измерить микрометром толщину  $h$  пластины.

5. Результаты всех измерений занести в табл.0.5.

6. Каждое измерение повторить не менее трех раз.

7. Пользуясь техническими весами, определить массу пластинки (трехкратным взвешиванием).

8. Вычислить среднюю плотность материала пластины как

$$\bar{\rho} = \frac{\bar{m}}{\bar{L} \cdot \bar{b} \cdot \bar{h}}, \quad (0.42)$$

где  $\bar{m}, \bar{L}, \bar{b}, \bar{h}$  – средние значения величин.

Плотность находят в  $\text{г/см}^3$  и  $\text{кг/м}^3$ .

9. Вычислить доверительную и относительную погрешность измерения по формулам (0.17) и (0.18).

### Контрольные вопросы

1. Инертная и гравитационная масса. Свойство аддитивности массы.
2. Как измеряется масса тела в работе?
3. Что такое плотность вещества? Какова ее размерность?

### Вопросы по разделу

1. Как измерить линейные размеры с помощью штангенциркуля и микрометра?
2. Что такое прямые и косвенные измерения?
3. Дать определение грубой, систематической и случайной погрешности измерений.
4. Что такое результат измерения?
5. Как определяется абсолютная погрешность отдельного результата измерений?
6. Какая функция описывает закон нормального распределения погрешностей? Привести графическую зависимость.
7. Что такое доверительная вероятность? Как определить по кривой нормального распределения доверительную вероятность для заданного доверительного интервала?
8. Как рассчитать среднеквадратичную погрешность при достаточно большом числе измерений?
9. Когда применяется распределение Стьюдента? Как с его помощью определить доверительную границу погрешности прямого измерения?
10. Как изменяется доверительная граница погрешности при изменении числа измерений и доверительной вероятности?
11. От чего зависят приборные погрешности?
12. Как рассчитать доверительную границу случайной погрешности косвенного измерения?
13. Что называется относительной погрешностью измерения?
14. Какому критерию удовлетворяет график, построенный по методу наименьших квадратов?
15. Как зависит граничная погрешность углового коэффициента  $k$  наклона графика к оси  $OX$  от среднего квадратичного отклонения величины  $y$ ?
16. Каковы пути уменьшения граничной погрешности коэффициентов  $k$  и  $b$  при графической обработке экспериментальных данных?

## РАЗДЕЛ 1

### Динамика поступательного движения материальной точки. Законы сохранения импульса и энергии

#### *1.1 Динамика поступательного движения. Закон сохранения импульса*

##### Первый закон Ньютона.

Тело (материальная точка) сохраняет состояние покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока воздействия со стороны других тел или полей не выведут его из этого состояния. Мерой воздействия является сила. Этот закон называют законом инерции. Он выполняется в инерциальных системах отсчета.

Система отсчета покоящаяся или движущаяся равномерно и прямолинейно относительно инерциальной системы сама является инерциальной.

Система отсчета, связанная с Землей неинерциальна за счет вращения Земли. Влияние этого фактора невелико, и для большинства практических задач земную систему можно приближенно считать инерциальной.

##### Второй закон Ньютона.

Упомянутая в первом законе сила является векторной величиной ( $\vec{F}$ ). На тело (материальную точку) могут действовать несколько ( $k$ ) сил.

Тогда их векторная сумма равна равнодействующей  $\vec{R}$ . Например (см. рис.1.1 и рис.1.2):

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4$$

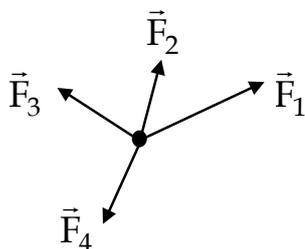


Рис. 1.1

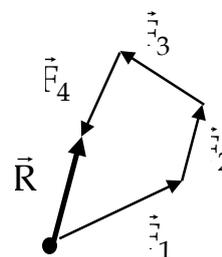


Рис. 1.2

В общем случае

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^k \vec{F}_i \quad (1.1)$$

Проекции этой силы на координатные оси

$$\begin{aligned}\vec{R}_x &= \sum_{i=1}^k F_{i_x} \cdot \vec{i}, \\ \vec{R}_y &= \sum_{i=1}^k F_{i_y} \cdot \vec{j}, \\ \vec{R}_z &= \sum_{i=1}^k F_{i_z} \cdot \vec{k}.\end{aligned}\tag{1.2}$$

где  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  - единичные векторы (орты).

При рассмотрении системы материальных точек (тел) силы взаимодействия точек между собой являются внутренними для данной системы, а силы воздействия на точки этой системы со стороны других тел называются внешними.

Кроме упомянутого выше (0.33) выражения для второго закона Ньютона, второй закон может быть представлен как:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt},\tag{1.3}$$

здесь  $\vec{p} = m\vec{v}$  - импульс (количество движения) - мера механического движения тела (материальной точки).

Формулировка закона: первая производная по времени от импульса материальной точки равна действующей на нее силе.

Закон (1.3) можно представить в виде:

$$\vec{F} \cdot dt = d\vec{p} = d(m\vec{v}).\tag{1.4}$$

Здесь  $\vec{F} \cdot dt$  - импульс силы.

Тогда импульс действующей на тело силы равен изменению импульса тела.

Согласно (1.3)  $\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$ ; если можно считать  $m = \text{const}$ , то

$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$ ; и мы получаем уравнение (0.33), известное как

основное уравнение динамики поступательного движения (материальной точки). В прямоугольных декартовых координатах оно выглядит как

$$\begin{aligned}m\ddot{x} \cdot \vec{i} &= \vec{F}_x; \\ m\ddot{y} \cdot \vec{j} &= \vec{F}_y; \\ m\ddot{z} \cdot \vec{k} &= \vec{F}_z.\end{aligned}\tag{1.5}$$

Если на систему материальных точек действуют несколько внешних сил, то в основном уравнении динамики поступательного движения  $\vec{F} = \vec{R}$  (равнодействующей), и  $\vec{a}$  - ускорение центра масс системы:

$$\vec{R} = m\vec{a}_{ц.м.} \quad (1.6)$$

Если система тел (материальных точек) замкнута в механическом отношении, то есть сумма внешних для системы сил равна  $\vec{R} = 0$ , получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\vec{p}_{\text{системы}}) &= 0; \\ \vec{p} &= \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = \text{const.} \end{aligned} \quad (1.7)$$

$m_i$ ,  $\vec{v}_i$  - масса и скорость  $i$ -го тела системы.

Это закон сохранения импульса системы. Соответственно, сохраняются и проекции импульса на оси координат  $\vec{p}_x, \vec{p}_y, \vec{p}_z$ :

$$\vec{p}_x = p_x \vec{i}, \quad \vec{p}_y = p_y \vec{j}, \quad \vec{p}_z = p_z \vec{k};$$

$$\begin{aligned} p_x &= \sum_{i=1}^n m_i v_{ix} = \text{const}, \\ p_y &= \sum_{i=1}^n m_i v_{iy} = \text{const}, \\ p_z &= \sum_{i=1}^n m_i v_{iz} = \text{const}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

### Третий закон Ньютона.

Два тела (материальные точки) действуют друг на друга с силами, которые равны по модулю и направлены в противоположные стороны вдоль прямой, соединяющей эти точки

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}. \quad (1.9)$$

Силы  $\vec{F}_{12}$  и  $\vec{F}_{21}$  приложены к разным телам.

Из третьего закона следует, что в замкнутой в механическом отношении системе сумма внутренних сил (взаимодействия тел системы) равна нулю:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \vec{F}_{ik} = 0 \quad (1.10)$$

где  $n$  - число тел системы.

## **1.2 Энергия, работа, мощность. Закон сохранения энергии**

Различные формы движения материи могут превращаться друг в друга в определенных количественных соотношениях. Для измерения различных форм движения материи введена единая мера, называемая энергией (E).

К механической энергии относят два вида энергии - кинетическую (K) и потенциальную (U).

При поступательном движении кинетическая энергия тела массой  $m$ , движущегося со скоростью  $v$  равна

$$K = \frac{mv^2}{2}. \quad (1.11)$$

Кинетическая энергия механической системы равна сумме кинетических энергий всех частей этой системы

$$K_{\text{системы}} = \sum_{i=1}^n K_i = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2}. \quad (1.12)$$

$n$  - число тел (материальных точек) системы.

Изменение кинетической энергии системы равно работе сил, действующих на эту систему со стороны других тел или полей:

$$dK = \delta A \quad (1.13)$$

Работа есть мера изменения механической энергии. Работа силы  $\vec{F}$  на элементарном перемещении  $d\vec{r}$

$$\delta A = \vec{F} d\vec{r}. \quad (1.14)$$

Работа - скалярная величина, являющаяся функцией процесса. Отсюда: функционал  $\delta(A)$ .

Так как  $|d\vec{r}| = ds$  - элементарный путь, то

$$\delta A = F \cdot dS \cdot \cos \alpha = F_s \cdot dS \quad (1.15)$$

где  $F_s$  - проекция силы  $\vec{F}$  на направление перемещения  $d\vec{r}$ ,  $\alpha$  - угол между  $\vec{F}$  и  $d\vec{r}$ .

Если положение начальной и конечной точек движения характеризуется  $r_1$  и  $r_2$ , то

$$A = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} d\vec{r} = \int_0^{\Delta S} F_s dS, \quad (1.16)$$

где  $\Delta S$  - длина элемента траектории тела.

Для характеристики скорости совершения работы, то есть работы, совершаемой в единицу времени, вводится понятие мощности.

Мгновенная мощность:

$$N = \frac{\delta A}{dt}; \quad (1.17)$$

Так как  $\delta A = \vec{F}d\vec{r} = \vec{F}\vec{v}dt$ , то

$$N = \vec{F} \cdot \vec{v}, \quad (1.18)$$

то есть мощность равна скалярному произведению силы, приложенной к телу (материальной точке) на скорость тела. Мощность измеряется в ваттах.

Средняя мощность:

$$\langle N \rangle = \frac{A}{\Delta t}, \quad (1.19)$$

где  $\Delta t$  - время совершения работы  $A$ .

Если работа сил зависит только от начальных и конечных положений точек их приложения, не зависит от траектории и от закона движения по траектории, то такие силы называются *консервативными*, а поле *потенциальным*.

В потенциальном поле (рис.1.3)

$$(A_{12})_a = (A_{12})_b. \quad (1.20)$$

При перемещении тела (материальной точки) по замкнутой траектории в потенциальном поле

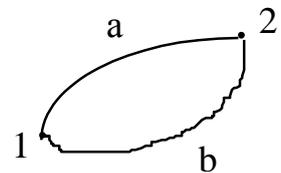


Рис.(1.31)

$$\oint_L \vec{F}d\vec{r} = 0.$$

Работа консервативных сил в потенциальном поле совершается за счет энергии потенциального поля путем ее убыли:

$$\delta A = -dU. \quad (1.22)$$

С другой стороны ( $m = \text{const}$ ):

$$\delta A = F_s dS = m \frac{dv}{dt} \cdot v dt = m v dv = d\left(\frac{mv^2}{2}\right) \quad (1.23)$$

Получаем

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = -dU; \quad \text{или} \quad d\left(\frac{mv^2}{2} + U\right) = 0.$$

Следовательно

$$K + U = \text{const}. \quad (1.24)$$

Это закон сохранения механической энергии для системы в потенциальном поле, т.е. при отсутствии неконсервативных сил, к которым, например, относятся силы сопротивления и трения.

Пример: потенциальная энергия тела (материальной точки) в однородном силовом поле. На точку со стороны поля действует сила  $\vec{F}$ , направленная вдоль оси OY

$$dU = -\delta A = -\vec{F}d\vec{r} = -F_y dy.$$

Тогда

$$U = -F_y \cdot y + U(0), \quad (1.25)$$

где  $U(0)$  - потенциальная энергия в точке  $y = 0$ .

Если материальная точка массой  $m$  находится в гравитационном поле, то сила  $F_y$  - сила тяжести:

$$F_y = -mg,$$

тогда

$$U = mgy + U(0). \quad (1.26)$$

В поле сил тяжести у поверхности Земли  $y = h$ , где  $h$  - высота подъема над уровнем  $h = 0$ .

$$U = mgh + U(0). \quad (1.27)$$

Закон сохранения энергии для тела, движущегося в поле тяготения Земли:

$$K + U = \frac{mv^2}{2} + mgh = \text{const}. \quad (1.28)$$

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 25(ф)

### Определение коэффициента сопротивления жидкой среды

Цель работы: определение зависимости коэффициента сопротивления движению тела в жидкости от размеров тела.

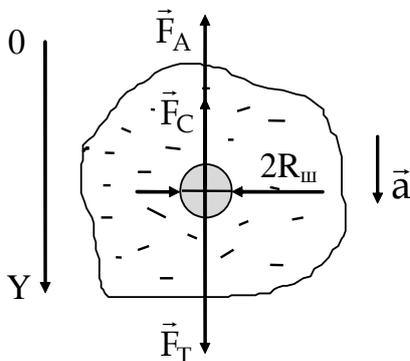


Рис. 1.4

#### Методика измерений

На твердый шарик, опускающийся в вязкой жидкости, действуют три силы (рис.1.4): сила тяжести

$$\vec{F}_T = m\vec{g} = \rho_{ш} V\vec{g},$$

выталкивающая сила Архимеда  $F_A$  и сила сопротивления движению шарика  $F_C$ , обусловленная силами

внутреннего трения жидкости.

### Сила Архимеда $F_A$ .

На тело, погруженное в жидкость плотностью  $\rho_0$ , со стороны жидкости действует сила, направленная вертикально вверх и приложенная к центру тяжести погруженной части тела (сила Архимеда), как это показано на рис.1.5.

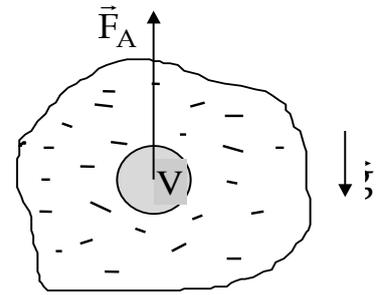


Рис. 1.5

$$\vec{F}_A = -\rho_0 V \vec{g}, \quad (1.29)$$

где  $V$  - объем погруженного в жидкость тела,  $g$  - ускорение свободного падения.

### Сила сопротивления $F_C$ .

При относительном движении твердого тела и вязкой среды (жидкость, газ) на тело действует сила сопротивления, которая при малых скоростях пропорциональна скорости тела и направлена в сторону, противоположную вектору скорости тела (рис.1.6):

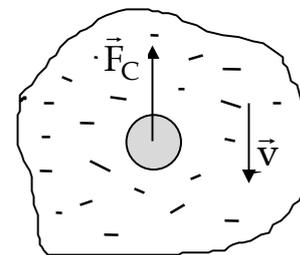


Рис. 1.6

$$\vec{F}_C = -r \vec{v}, \quad (1.30)$$

где коэффициент пропорциональности  $r$  (коэффициент сопротивления среды) зависит от формы, поперечных размеров тела и свойств среды, в которой оно перемещается. Коэффициент сопротивления  $r$  численно равен силе сопротивления при единичной скорости движения. Размерность  $r$ :

$$[r] = \frac{[F]}{[v]} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}}{\text{с}^2 \cdot \text{м}} = \frac{\text{кг}}{\text{с}}.$$

Уравнение движения шарика радиусом  $R_{\text{ш}}$  в жидкости (второй закон Ньютона), записанный в проекции на ось  $OY$  (рис.1.4) имеет вид:

$$ma = \frac{4}{3} \pi R_{\text{ш}}^3 \rho_{\text{ш}} g - \frac{4}{3} \pi R_{\text{ш}}^3 \rho_0 g - rv. \quad (1.31)$$

Здесь  $\rho_{\text{ш}}$  - плотность вещества шарика,  $\rho_0$  - плотность жидкости.

Все три силы, входящие в правую часть уравнения (1.31) направлены по вертикали: сила тяжести - вниз, выталкивающая сила и сила сопротивления - вверх. На начальном участке шарик падает с ускорением и скорость его увеличивается. При этом сила

сопротивления возрастает. После достижения некоторой скорости  $v_0$ , при которой сумма всех действующих на шарик сил становится равной нулю, шарик будет двигаться с постоянной скоростью. Такое движение шарика называется установившимся. В этом случае уравнение (1.31) принимает вид

$$\frac{4}{3}\pi R_{\text{ш}}^3 g(\rho_{\text{ш}} - \rho_0) - r v_0 = 0. \quad (1.32)$$

Решая уравнение (1.32) относительно коэффициента сопротивления  $r$ , получаем

$$r = \frac{4\pi R_{\text{ш}}^3 g(\rho_{\text{ш}} - \rho_0)}{3v_0}. \quad (1.33)$$

Следовательно, для определения коэффициента сопротивления движению шарика в жидкости необходимо знать размеры шарика, плотности материала шарика и жидкости, а также скорость падения шарика.

### Экспериментальная установка

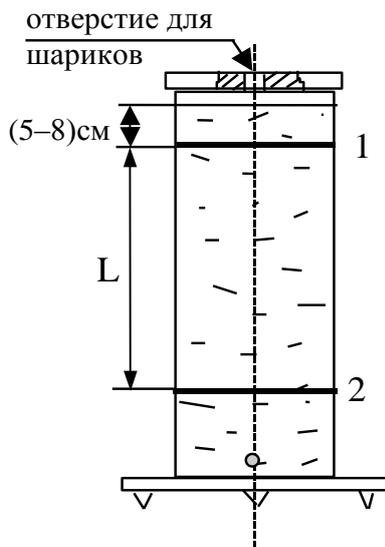


Рис. 1.7

В работе в качестве сосуда, в котором находится исследуемая жидкость, используется стеклянный цилиндр (рис.1.7). Снаружи цилиндра укреплены кольцевые горизонтальные метки 1 и 2, расположенные одна от другой на расстоянии  $L$  (верхняя метка должна быть ниже уровня жидкости на (5...8) см). Цилиндр укреплен на подставке, имеющей винты и отвес, предназначенные для установки вертикальности цилиндра. Время падения шарика в жидкости определяется с помощью секундомера. Плотности материала шарика и жидкости приведены на подставке.

### Порядок выполнения работы

1. Установить метки 1 и 2 на цилиндре и измерить расстояние между ними по линейке (глаз наблюдателя при отсчете положения меток должен находиться на одной горизонтали с меткой).

2. Измерить диаметр  $d$  каждого шарика при помощи микрометра (или данные сообщает лаборант). Обычно студенты получают три пары шариков разных диаметров. Определить радиус шарика  $R_{\text{ш}} = d/2$ .

3. Опустить шарик в жидкость как можно ближе к оси цилиндра и с помощью секундомера измерить время падения шарика между метками 1 и 2. Опыт с шариком одного и того же диаметра повторить два раза. Измерения записать в табл.1.1.

Таблица 1.1

№ п.п	d м	R <sub>ш</sub> м	ρ <sub>ш</sub> кг/м <sup>3</sup>	ρ <sub>0</sub> кг/м <sup>3</sup>	L м	t с	v <sub>0</sub> м/с	r кг/с
1								
2								
3								
среднее								
1								
2								
3								
среднее								
1								
2								
3								
среднее								

4. Измерения по п.3 повторить с шариками другого диаметра (еще два-три размера).

5. По формуле  $v_0 = L/t$  рассчитать скорость установившегося движения каждого шарика.

6. Вычислить значение коэффициента сопротивления для каждого опыта и среднее значение  $\bar{r}$  для каждого размера шарика.

7. Построить график зависимости среднего коэффициента сопротивления от радиуса шарика  $\bar{r} = f(R_{ш})$ .

8. Вычислить доверительную и относительную погрешности измерения коэффициента сопротивления движению шарика одного из диаметров по формулам (0.17) и (0.18).

### Контрольные вопросы

1. Что называется силой Архимеда?
2. От чего зависит сила сопротивления движению тела в жидкости (газе)?
3. Опишите методику измерения коэффициента сопротивления, используемую в данной работе.
4. Запишите уравнения движения шарика на начальном и основном участках.

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 5

### Изучение упругого удара шаров

Цель работы: Проверка законов сохранения импульса и механической энергии, изучение зависимости средней силы удара и времени соударения от относительной скорости шаров.

#### Методика измерений

При упругом соударении твёрдые тела претерпевают деформацию. При этом кинетическая энергия в начальной фазе удара частично или полностью переходит в потенциальную энергию упругой деформации и во внутреннюю энергию сталкивающихся тел. Вслед за этим, в завершающей фазе удара, потенциальная энергия упругой деформации переходит в кинетическую энергию этих тел.

Для понимания явления соударения реальных твёрдых тел следует рассмотреть два предельных случая удара: абсолютно неупругий удар и абсолютно упругий удар.

При *абсолютно неупругом* ударе упругой деформации не возникает, а кинетическая энергия тел частично или полностью превращается во внутреннюю энергию. После удара тела объединяются и движутся с одинаковой скоростью, как единое твердое тело или покоятся. В этом случае выполняются закон сохранения импульса и закон сохранения **полной** энергии системы тел (механической и внутренней), но закон сохранения механической энергии не выполняется.

При *абсолютно упругом* ударе кинетическая энергия тел частично или полностью превращается в потенциальную энергию упругой деформации, которая потом опять переходит в кинетическую энергию тел после удара. В случае абсолютно упругого удара выполняются закон сохранения импульса и закон сохранения механической энергии. При этом система соударяющихся тел должна быть замкнутой. Абсолютно упругий удар твердых тел является идеализацией, то есть в природе не существует.

Рассмотрим подробнее соударение двух металлических шаров массами  $m_1$  и  $m_2$ , подвешенных на нитях длиной  $L$ , как показано на рис.1.8. Будем считать, что удар является центральным, т.е. в момент соударения шары движутся по прямой, проходящей через их центры.

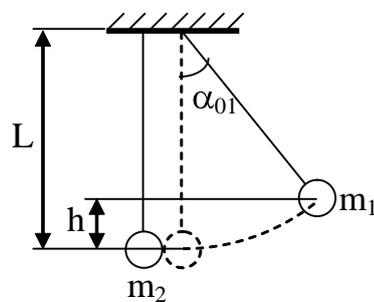


Рис. 1.8

В исходном состоянии шары находятся в положении равновесия. Если правый шар массой  $m_1$  отклонить на угол  $\alpha_{01}$  и отпустить, то к моменту соударения его в нижней точке с неподвижным левым шаром он разовьет скорость  $v_{01}$ . Эту скорость можно найти, записав закон сохранения механической энергии (1.28) для первого шара

$$m_1gh = \frac{m_1v_{01}^2}{2}. \quad (1.34)$$

Откуда

$$v_{01} = \sqrt{2gh}, \quad (1.35)$$

где  $h$  – высота подъема центра масс шара 1 при отклонении его на угол  $\alpha_{01}$ .

Учитывая, что

$$h = L(1 - \cos\alpha_{01}) = 2L \sin^2 \frac{\alpha_{01}}{2},$$

получаем

$$v_{01} = 2\sqrt{gL} \cdot \sin^2 \frac{\alpha_{01}}{2}. \quad (1.36)$$

В результате соударения шар 2 приобретает скорость  $v_2$ , а скорость первого шара станет равной  $v_1$ . Эти скорости можно найти также из закона сохранения энергии по формулам, аналогичным (1.36)

$$v_1 = 2\sqrt{gL} \cdot \sin^2 \frac{\alpha_1}{2}; \quad (1.37)$$

$$v_2 = 2\sqrt{gL} \cdot \sin^2 \frac{\alpha_2}{2}.$$

Здесь  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  – углы, на которые отклонятся, разлетевшись после удара, первый и второй шары, соответственно.

Если бы удар шаров был абсолютно упругим, то, в соответствии с законом сохранения импульса (1.7) и механической энергии (1.28), имели бы место равенства

$$m_1\vec{v}_{01} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 \quad (1.38)$$

$$\frac{m_1v_{01}^2}{2} = \frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} \quad (1.39)$$

Реальные шары, однако, не являются идеально упругими, а удар – абсолютно упругим. Это не нарушает закон сохранения импульса (1.38), но делает несправедливым равенство суммарных кинетических энергий шаров до и после соударения (1.39). Поэтому для характеристики близости реального упругого удара к абсолютно упругому вводятся коэффициент восстановления скорости  $k_c$  и коэффициент восстановления энергии  $k_\epsilon$ , определяемые выражениями:

$$k_c = \frac{v_r}{v_{r0}} = \frac{|\vec{v}_2 - \vec{v}_1|}{|\vec{v}_{02} - \vec{v}_{01}|}; \quad (1.40)$$

$$k_э = \frac{K}{K_0} = \frac{K_1 + K_2}{K_{01} + K_{02}},$$

где  $v_{r0}$ ,  $v_r$  – относительные скорости шаров до и после удара;  $K_0$ ,  $K$  – суммарные кинетические энергии шаров до и после удара.

Пусть в рассмотренном опыте  $m_1 < m_2$ . В этом случае шары после удара движутся в разные стороны (скорость  $v_1$  направлена противоположно скоростям  $v_{01}$ , и  $v_2$ ), а скорость второго шара до удара  $v_{02} = 0$ . Тогда можно записать

$$v_{r0} = v_{01}; \quad K_{01} = \frac{m_1 v_{01}^2}{2}, \quad K_{02} = 0. \quad (1.41)$$

$$v_r = v_2 + v_1; \quad K = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}.$$

С учетом формулы (1.41) для коэффициентов восстановления из (1.40) имеем

$$k_c = \frac{v_2 + v_1}{v_{01}}; \quad (1.42)$$

$$k_э = \frac{m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2}{m_1 v_{01}^2}. \quad (1.43)$$

Средняя сила удара шаров может быть найдена из второго закона Ньютона (1.3)

$$F = \frac{m \Delta v}{\tau}, \quad (1.44)$$

где  $\tau$  - время соударения,  $\Delta v$  – изменение скорости одного из шаров за это время.

Для второго шара начальная скорость  $v_{02} = 0$ , поэтому

$$\Delta v = |\vec{v}_2 - \vec{v}_{02}| = v_2.$$

Тогда из (1.44) получаем выражение для расчета средней силы удара шаров

$$F = \frac{m_2 v_2}{\tau}. \quad (1.45)$$

### Экспериментальная установка

В работе для исследования упругого удара шаров используется экспериментальная установка, общий вид которой приведен на рис.1.9.

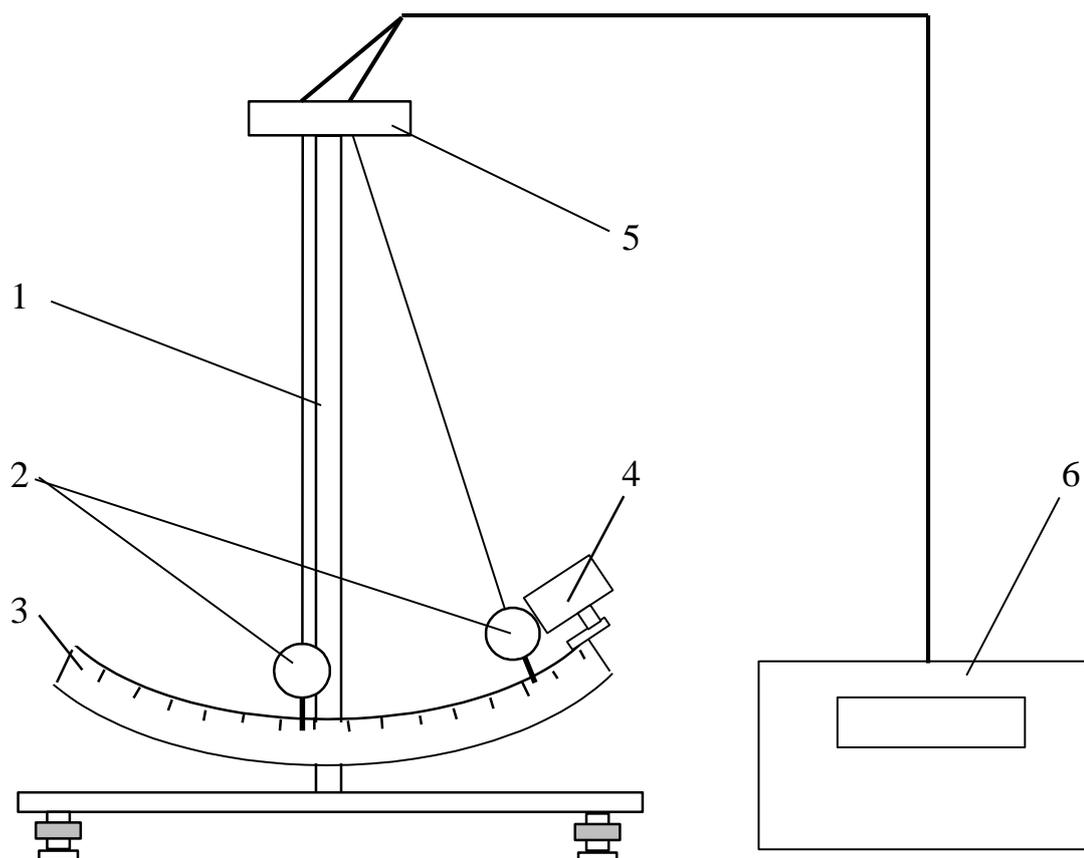


Рис. 1.9

К штативу 1 прикреплены на нитях при помощи специальных скобок два шара 2. Углы отклонения подвесов от вертикали определяются по шкале 3. Электромагнит 4 служит для удержания одного из шаров в отклоненном положении. Электромагнит может перемещаться вдоль шкалы 3.

Электромагнит и соединенные тонкими проводами с металлическими скобками клеммы верхнего кронштейна 5 подключены к электронному блоку 6. Электронный блок предназначен для управления электромагнитом и регистрации времени соударения шаров.

### Порядок выполнения работы

1. Аккуратно вставить в правую скобу алюминиевый шар со стальной вставкой, а в левую скобу – стальной или латунный шар.

2. С помощью регулировочных опор выставить основание установки таким образом, чтобы нижние визиры скоб подвеса указывали на нулевые отметки шкалы 3.

3. Отрегулировать положение шаров в вертикальной и горизонтальной плоскостях до совмещения верхних визиров скоб подвеса. Регулировку производить изменением длины подвеса шаров, а

также изменением положения узлов крепления нитей на верхнем кронштейне.

4. Зарегистрировать в заголовке табл.1.2 начальные положения шаров, отсчитанные по шкале 3:  $O_1$  – для правого шара и  $O_2$  – для левого шара.

5. Определить длину подвеса  $L$  (от центра шара до точки подвеса).

6. Переместить электромагнит по шкале 3 в крайнее правое положение и зафиксировать его.

7. Включить в сеть шнур питания электронного блока 6 и нажать клавишу «Вкл. сеть», расположенную на задней панели блока. После этого на табло индикации высветятся нули, а на электромагнит 4 будет подано напряжение.

Таблица 1.2

$O_1 = \underline{\hspace{2cm}}$  (град);  $O_2 = \underline{\hspace{2cm}}$  (град);  $L = \underline{\hspace{2cm}}$  (м).

Серия	№ п.п.	$N_{01}$ град	$\tau$ с	$N_1$ град	$N_2$ град	$\alpha_{01}$ град	$\alpha_1$ град	$\alpha_2$ град
1	1.							
	2.							
	3.							
	4.							
	5.							
	Среднее							
2	1.							
	2.							
	3.							
	4.							
	5.							
	Среднее							
3	1.							
	2.							
	3.							
	4.							
	5.							
	Среднее							

8. Произвести три соударения шаров, оставляя левый шар в положении равновесия, а правый, отклоняя на угол, задаваемый положением электромагнита. Определить при первом соударении шаров время удара  $\tau$ , при втором – первый отброс (угол отклонения

подвеса от вертикали) правого шара  $N_1$ , при третьем – первый отброс левого шара  $N_2$ .

Каждое измерение производить следующим образом:

- а) Отклонить правый шар до соприкосновения с электромагнитом и записать значение угла отклонения его подвеса от вертикали  $N_{01}$ .
- б) Убедившись, что левый шар находится в состоянии покоя, нажать кнопку «Старт» на электронном блоке 6. После этого произойдет удар шаров.
- в) Произвести отсчет либо времени удара  $\tau$ , либо отброса правого шара  $N_1$ , либо отброса левого шара  $N_2$ .
- г) Результаты измерений занести в табл.1.2.
- д) Нажать клавишу «Стоп». При этом на табло индикации электронного блока высветятся нули, а на электромагнит будет подано напряжение.

9. Выполнить измерения по п.8 пять раз при одном и том же положении электромагнита.

10. Провести измерения  $\tau$ ,  $N_{01}$ ,  $N_1$  и  $N_2$  при трех положениях электромагнита, меняя значение  $N_{01}$  в пределах  $(10 \div 15)^\circ$ .

11. Выключить электронный блок и питание электромагнита, нажав на клавишу «Вкл. сеть», расположенную на задней панели блока.

12. Найти средние значения времени соударения  $\tau$ , а также значений  $N_1$  и  $N_2$  для каждой серии измерений.

13. Определить углы отклонения шаров по формулам

$$\begin{aligned}\alpha_{01} &= N_{01} - O_1; \\ \alpha_1 &= N_1 - O_1; \\ \alpha_2 &= N_2 - O_2,\end{aligned}\tag{1.46}$$

используя средние значения  $N_1$  и  $N_2$ .

14. Определить по формулам (1.36) и (1.37) скорости  $v_{01}$ ,  $v_1$ ,  $v_2$  для каждой серии измерений и полученные значения занести в табл. 1.3.

Таблица 1.3

$$m_1 = \text{_____}(\text{кг}), \quad m_2 = \text{_____}(\text{кг}),$$

Серия	$v_{01}$ м/с	$v_1$ м/с	$v_2$ м/с	$p_{\text{нач.}}$ кг·м/с	$p_{\text{кон.}}$ кг·м/с	$k_c$ –	$k_3$ –	$\tau$ с	F Н
1									
2									
3									

15. Взвесить шары на технических весах или узнать массы шаров у лаборантов. Записать полученные значения в заголовок табл.1.3.

16. Для каждой серии измерений:

а) Подсчитать начальный импульс системы (до соударения)

$$p_{\text{нач}} = m_1 v_{01} \quad (1.47)$$

и конечный импульс

$$p_{\text{кон}} = m_2 v_2 - m_1 v_1, \quad (1.48)$$

учитывая, что после удара шары движутся в противоположные стороны;

б) Сравнить значения начального и конечного импульсов по формуле

$$n = \frac{p_{\text{кон}}}{p_{\text{нач}}}. \quad (1.49)$$

в) Определить коэффициент восстановления скорости  $k_c$  по формуле (1.42).

г) Рассчитать коэффициент восстановления энергии  $k_э$  по формуле (1.43).

д) Записать в табл.1.3 среднее значение времени удара  $\tau$  (из табл.1.2) и по формуле (1.45) определить среднюю силу удара  $F$ . Занести полученные значения в табл.1.3.

17. Построить графики:

а) зависимости силы удара от относительной скорости сталкивающихся шаров  $F = f(v_{01})$ ;

б) зависимости времени соударения от относительной скорости сталкивающихся шаров  $\tau = f(v_{01})$ .

### Контрольные вопросы

1. Какой удар называется абсолютно упругим?
2. Какой удар называется абсолютно неупругим?
3. Какие законы сохранения выполняются при абсолютно упругом ударе?
4. Какие законы сохранения выполняются при абсолютно неупругом ударе?
5. Какой удар называется центральным?
6. Как определить среднюю силу центрального упругого удара шаров?
7. Что характеризуют коэффициенты восстановления скорости и энергии?
8. В каких пределах может изменяться коэффициент восстановления энергии?

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 5а

### Изучение неупругого удара шаров

Цель работы: проверка законов сохранения импульса и энергии, определение потерь энергии на неупругую деформацию при неупругом ударе.

#### Методика измерений

Рассмотрим применение законов сохранения импульса и энергии при соударении двух тел (рис.1.10). Будем рассматривать соударение двух неупругих шаров, движущихся вдоль прямой, соединяющей их центры. Такой удар называется центральным.

При ударе шары деформируются. Часть энергии, которой они обладали, переходит в энергию деформации.

При неупругом ударе кинетическая энергия тел полностью или частично переходит во внутреннюю. Тела после удара либо покоятся, либо движутся вместе с одинаковой скоростью как единое целое. При абсолютно неупругом ударе закон сохранения импульса выполняется, а закон сохранения механической энергии - нет. В этом случае можно говорить о выполнении закона сохранения в более широком смысле - о сохранении суммарной энергии (механической и внутренней).

Запишем закон сохранения импульса:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{v} \quad (1.50)$$

и закон сохранения энергии:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2) v^2}{2} + \Delta E, \quad (1.51)$$

где  $m_1, m_2$  - массы соударяющихся шаров;  $v_1, v_2$  - скорости их до удара;  $v$  - скорость шаров после удара;  $\Delta E$  - энергия деформации.

Изменение полной механической энергии соударяющихся тел в этом случае равно изменению их кинетической энергии:

$$\Delta E = K_{\text{нач.}} - K_{\text{конеч.}};$$

$$\Delta E = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2) v^2}{2} = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_1 - v_2)^2,$$

где  $(v_1 - v_2)$  - относительная скорость шаров перед ударом.

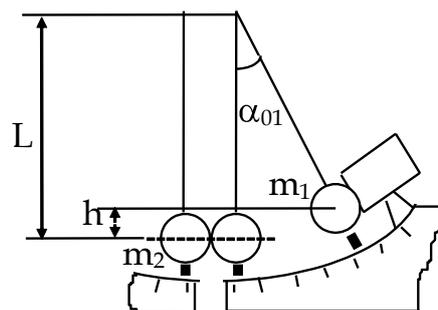


Рис. 1.10

При ударе неупругие тела приобретают деформацию, которая сохраняется после удара (остаточная деформация). При этом совершается работа, которая затрачивается на энергию деформации  $\Delta E$ . Работа деформации равна убыли полной механической энергии тел:

$$A = \Delta E = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_1 - v_2)^2.$$

Если второе тело до удара было неподвижно ( $v_2 = 0$ ), то

$$\Delta E = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} v_1^2 = \frac{m_2}{(m_1 + m_2)} \cdot K_1.$$

В работе два шара из неупругого материала (пластилина) с массами  $m_1$  и  $m_2$  подвешены на нитях длиной  $L$  (рис. 1.10). Если шар 1 отклонить на угол  $\alpha_{01}$  от его первоначального положения и отпустить, то к моменту соударения с неподвижным шаром 2 в нижней точке он будет иметь скорость  $v_1$ :

$$m_1 g h = \frac{m_1 v_1^2}{2}; \quad v_1 = \sqrt{2gh},$$

где  $h$  - высота подъема центра масс шара  $m_1$  при его отклонении на угол  $\alpha_{01}$ . Из рис. 1.8 видно

$$h = L - L \cos \alpha_{01} = 2L \sin^2 \frac{\alpha_{01}}{2}.$$

До удара

$$v_1 = 2 \cdot \sqrt{gL} \sin \frac{\alpha_{01}}{2}. \quad (1.52)$$

После неупругого удара

$$v = 2 \cdot \sqrt{gL} \sin \frac{\alpha}{2}, \quad (1.53)$$

где  $v$ ,  $\alpha$  - начальная скорость и угол отклонения шаров после удара.

Из соотношений (1.34) - (1.37) получим выражение для энергии, затраченной на деформацию при неупругом ударе:

$$\Delta E = 2m_1 g L \left( \sin^2 \frac{\alpha_{01}}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right) - 2m_2 g L \sin^2 \frac{\alpha}{2}. \quad (1.54)$$

При  $m_1 = m_2 = m$

$$\Delta E = 2mgL \left( \sin^2 \frac{\alpha_{01}}{2} - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right). \quad (1.55)$$

Доля энергии системы, потерянной при неупругой деформации:

$$\delta = \frac{\Delta E}{K_1} = 1 - 2 \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin^2 \frac{\alpha_{01}}{2}}. \quad (1.56)$$

### Экспериментальная установка

Общий вид экспериментальной установки изображен на рис.1.11.

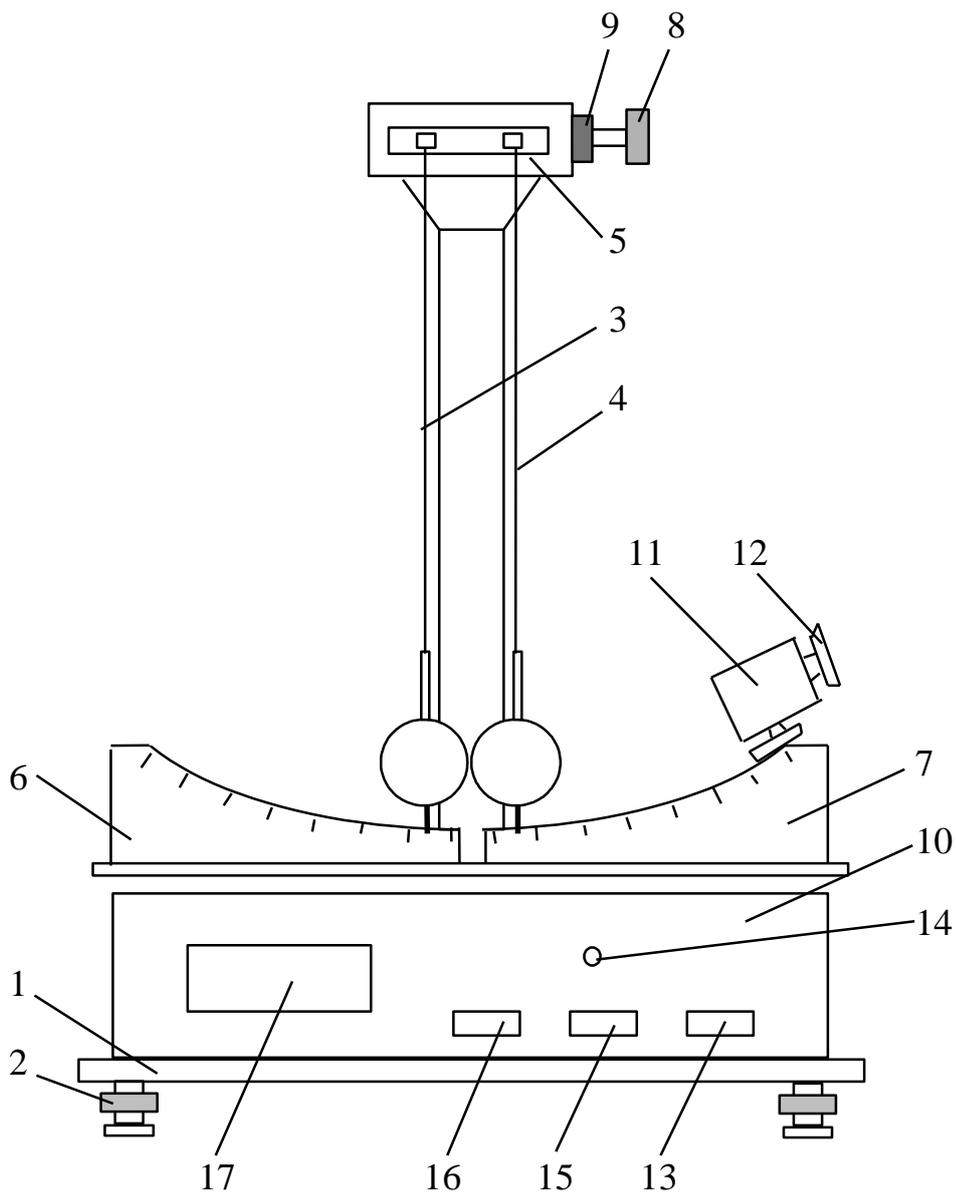


Рис. 1.11

Она состоит из основания 1 с регулируемыми опорами 2, двух маятников 3 и 4 с механизмом изменения межцентрового расстояния 5, двух шкал 6, 7; электромагнита 11 и микросекундомера 10. Маятники представляют собой шары, подвешенные на нитях к вертикальной

стойке. Нити двойные и имеют зажимы для регулировки и фиксации их длины.

Механизм изменения межцентрового расстояния шаров приводится в действие ручкой 8 и фиксируется гайкой 9.

Две шкалы служат для определения начальных углов и углов отклонения шаров от положения равновесия после удара. Шкалы можно перемещать и фиксировать в выбранном положении при помощи винтов. Максимальный отсчет по каждой шкале составляет  $15^\circ$ .

Электромагнит предназначен для удержания подвешенного к нему шара в отклоненном положении. Регулировка усилия притяжения шара осуществляется винтом 12. Положение электромагнита должно быть отрегулировано так, чтобы его ось совпадала с центром подвешенного к нему шара и чтобы он правильно ориентировал шар в плоскости шкалы.

С помощью регулировочных опор 2 устанавливается вертикальное положение маятников в соответствии с уровнем. В исходном состоянии шары должны касаться друг друга, стрелки шаров должны находиться в параллельной вертикальной плоскости со шкалами.

Микросекундомер служит для измерения времени соударения шаров (в этой работе не используется).

На передней панели установки находятся:

кнопка “Сеть” (13) для включения питания электромагнита (220 В);

кнопка “Пуск” (16) для отключения электромагнита.

### **Порядок выполнения работы**

Перед началом измерения взвесить шары на аналитических весах или узнать их массы у лаборанта. Установить прибор устойчиво и горизонтально с помощью регулируемых опор 2. Шары должны соприкасаться в положении равновесия, что достигается регулировочным винтом 5. Удар должен быть центральным, что достигается регулированием длины нитей подвеса.

Установить шкалы так, чтобы положение равновесия шаров было близко нулю каждой шкалы, закрепить шкалы. Зафиксировать положения равновесия шаров в делениях шкал.

Включить установку в сеть 220 В, нажать кнопку “Сеть” на панели. При этом должны загореться лампы цифрового индикатора.

Измерить длину нитей подвеса (до центра шаров) линейкой. Измерения повторить три раза. Найти среднее значение  $L$  и использовать его в расчетах.

#### Упражнение 1.

1. Подвесить на нити два шара с покрытием из пластилина.



2. Повторить упражнение 1.
3. Рассчитать потери энергии на неупругую деформацию по формулам (1.54) - (1.56) и занести в табл.1.5.

### **Контрольные вопросы**

1. Почему в работе требуется, чтобы удар был центральным?
2. Чему равна потенциальная энергия упруго деформированного твердого тела?
3. Могут ли быть скорости шаров после абсолютно упругого удара одинаковыми?
4. Один шар движется, а другой неподвижен. Как изменится скорость первого шара после абсолютно упругого удара и после абсолютно неупругого удара, если массы шаров одинаковы? Если масса второго шара значительно больше, чем первого?

### **Вопросы по разделу 1**

1. В каком законе Ньютона встречается понятие силы?
2. Какие силы Вы знаете?
3. В чем заключается закон всемирного тяготения Ньютона?
4. Что такое равнодействующая нескольких сил, приложенных к телу (материальной точке)?
5. Основное уравнение динамики поступательного движения тела.
6. Что такое импульс тела и импульс силы?
7. Третий закон Ньютона.
8. Что называется замкнутой механической системой?
9. Закон сохранения импульса.
10. Работа, мощность.
11. В чем особенности консервативных сил?
12. Показать, что сила тяжести консервативна.
13. Когда выполняется закон сохранения полной механической энергии?
14. Какое поле называется потенциальным?
15. Какой удар называется абсолютно упругим? Абсолютно неупругим?
16. Какие законы сохранения выполняются при абсолютно упругом ударе?
17. Какие законы сохранения выполняются при абсолютно неупругом ударе?
18. Чем объясняется уменьшение механической энергии при абсолютно неупругом ударе?
19. Получите выражение для потенциальной энергии сжатой пружины.

## РАЗДЕЛ 2

### Вращательное движение твердого тела

Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси - движение с одной степенью свободы. Мера перемещения тела - вектор  $d\vec{\varphi}$  - направлен вдоль оси вращения  $Z$  по правилу правого винта (рис.2.1).

Угловая скорость тела равна отношению вектора элементарного углового смещения тела к продолжительности этого смещения

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}; \quad |\vec{\omega}| = \frac{d\varphi}{dt}. \quad (2.1)$$

При равномерном вращении угловая скорость  $\omega = \text{const}$ , а угол поворота  $\varphi = \omega t$ .

Линейная скорость  $\vec{v}$  произвольной точки  $A$ , удаленной на расстояние  $R$  от оси  $Z$ :

$$v = \frac{dS}{dt}; \quad dS = R d\varphi = R \omega dt;$$

Получаем  $v = R\omega$ .

Вектор  $\vec{R} \perp \vec{\omega}$ , тогда можно записать

$$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{R}]. \quad (2.2)$$

С другой стороны

$$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}] = [\vec{\omega}, (\vec{r}_z + \vec{R})] = [\vec{\omega}, \vec{r}_z] + [\vec{\omega}, \vec{R}].$$

Но так как вектора  $\vec{\omega}$  и  $\vec{r}_z$  коллинеарны, то  $[\vec{\omega}, \vec{r}_z] = 0$ .

Вектор  $\vec{\epsilon}$ , характеризующий быстроту изменения угловой скорости, называется угловым ускорением

$$\vec{\epsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \quad (2.3)$$

Если угловая скорость  $\omega$  возрастает, то вектор углового ускорения  $\vec{\epsilon}$  направлен по оси вращения в ту же сторону, что и  $\vec{\omega}$ . При уменьшении  $\omega$  направление вектора  $\vec{\epsilon}$  противоположно  $\vec{\omega}$ .

Линейное ускорение точки  $A$  (рис.2.1) получаем, используя выражение для скорости (2.2):

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau = [\vec{\omega}, \vec{v}] + [\vec{\epsilon}, \vec{R}] = [\vec{\omega}[\vec{\omega}, \vec{R}]] + [\vec{\epsilon}, \vec{R}] = -\omega^2 \vec{R} + [\vec{\epsilon}, \vec{R}], \quad (2.4)$$

где  $\vec{a}_n$  - нормальное;  $\vec{a}_\tau$  - тангенциальное ускорение.

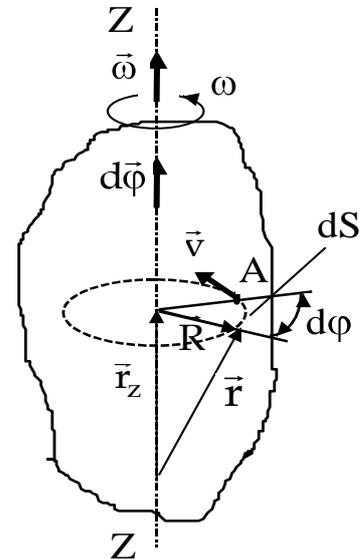


Рис. 2.1

Введем понятия момента силы и импульса относительно неподвижной точки  $O$ .

Моментом силы относительно неподвижной точки  $O$  называется векторное произведение радиуса-вектора  $\vec{r}$ , проведенного из точки  $O$  к точке приложения силы, на силу  $\vec{F}$  (см. рис.2.2):

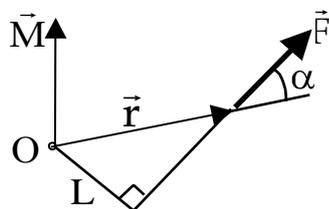


Рис. 2.2

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]. \quad (2.5)$$

Модуль этой величины

$$M = rF \sin \alpha = FL,$$

где  $L = r \sin \alpha$  - плечо силы, т.е. кратчайшее расстояние от точки  $O$  до линии действия силы,  $\alpha$  - угол между векторами  $\vec{r}$  и  $\vec{F}$ .

Вектор  $\vec{M}$  перпендикулярен плоскости, в которой находятся вектора, и направлен по обычному правилу векторного произведения.

Аналогично моментом импульса материальной точки  $m$  относительно неподвижной точки  $O$  называется векторное произведение:

$$\vec{L} = [\vec{r}, m\vec{v}], \quad (2.6)$$

модуль которого

$$L = rmv \sin \alpha.$$

Получим связь моментов силы  $\vec{M}$  и импульса  $\vec{L}$ . Производная по времени от момента импульса частицы равна

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} [\vec{r}, m\vec{v}] = \left[ \frac{d\vec{r}}{dt}, m\vec{v} \right] + \left[ \vec{r}, \frac{d(m\vec{v})}{dt} \right]. \quad (2.7)$$

Так как  $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ , то первое слагаемое в (2.7)

$$\left[ \frac{d\vec{r}}{dt}, m\vec{v} \right] = [\vec{v}, m\vec{v}] = 0.$$

Согласно (1.3) второе слагаемое можно представить в виде

$$\left[ \vec{r}, \frac{d(m\vec{v})}{dt} \right] = [\vec{r}, \vec{F}] = \vec{M}. \quad (2.8)$$

Подставляя (2.8) в (2.7), получаем уравнение моментов для материальной точки.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}. \quad (2.9)$$

Распространим (2.9) на систему материальных точек. Запишем (2.9) для каждой точки, учитывая, что на нее действуют как внутренние, так и внешние силы. При сложении этих уравнений сумма моментов внутренних сил обратится в нуль и получим уравнение моментов для системы материальных точек

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_{\text{внеш}}, \quad (2.10)$$

т.е. производная по времени от момента импульса системы материальных точек относительно неподвижной точки  $O$  равна векторной сумме моментов всех внешних сил относительно той же точки  $O$ .

Для замкнутой системы  $\sum_{i=1}^n \vec{M}_{\text{внеш}} = 0$  и получаем закон сохранения момента импульса для системы материальных точек

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^n \vec{L}_i = \text{const}. \quad (2.11)$$

Для получения уравнения движения тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, следует применить уравнение (2.9), взяв проекцию этого уравнения для точек тела на ось вращения  $Z$ .

Если к телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси, приложена сила  $\vec{F}$ , то момент силы относительно оси  $Z$  (рис.2.3) будет:

$$\vec{M}_z = [\vec{R}, \vec{F}]_z. \quad (2.12)$$

Так как  $\vec{F}$  можно представить в виде (рис.2.3):

$$\vec{F} = \vec{F}_z + \vec{F}_\tau + \vec{F}_R, \quad (2.13)$$

то

$$[\vec{R}, \vec{F}]_z = [\vec{R}, \vec{F}_z]_z + [\vec{R}, \vec{F}_\tau]_z + [\vec{R}, \vec{F}_R]_z = 0 + [\vec{R}, \vec{F}_\tau]_z + 0;$$

следовательно

$$\vec{M}_z = [\vec{R}, \vec{F}_\tau]_z, \quad (2.14)$$

то есть величина момента силы относительно оси  $Z$  определяется тангенциальной составляющей силы  $\vec{F}_\tau$  и “плечом” ее  $\vec{R}$ .

Уравнение динамики тела, вращающегося вокруг неподвижной оси  $Z$

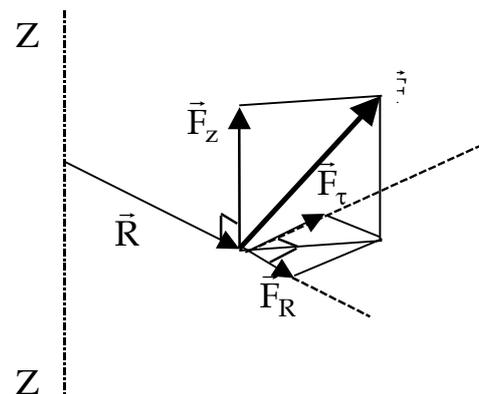


Рис. 2.3

$$\frac{d\vec{L}_z}{dt} = \vec{M}_z. \quad (2.15)$$

Здесь  $\vec{L}_z$  - момент импульса вращающегося тела относительно оси вращения.

В соответствии с рис.2.1 для системы материальных точек, составляющих вращающееся тело:

$$\vec{L}_z = \sum_{i=1}^n [\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i]_z = \sum_{i=1}^n [\vec{r}_{zi}, m_i \vec{v}_i]_z + \sum_{i=1}^n [\vec{R}_i, m_i \vec{v}_i]_z;$$

Вектор  $\sum_{i=1}^n [\vec{r}_{zi}, m_i \vec{v}_i]$  перпендикулярен оси  $Z$  и поэтому первое слагаемое равно нулю.

Тогда

$$\vec{L}_z = \sum_{i=1}^n [\vec{R}_i, m_i \vec{v}_i]_z = \sum_{i=1}^n [\vec{R}_i, m_i [\vec{\omega}, \vec{R}_i]] = \sum_{i=1}^n \vec{\omega} \cdot m_i R_i^2 = \vec{\omega} \sum_{i=1}^n m_i R_i^2. \quad (2.16)$$

Сумма произведений масс  $m_i$  всех материальных точек, составляющих тело (систему тел) на квадраты их расстояний  $R_i$  от некоторой оси (вращения), называется моментом инерции системы относительно этой оси.

$$J = \sum_{i=1}^n m_i R_i^2, \quad (2.17),$$

где  $J$  - скалярная величина, в системе СИ измеряется в  $\text{кг} \cdot \text{м}^2$ .

Тогда из (2.16) и (2.17) получаем

$$\vec{L}_z = J \cdot \vec{\omega}. \quad (2.18)$$

Продифференцировав по времени выражение (2.18) имеем

$$\frac{d}{dt}(\vec{L}_z) = \vec{M}_z = \frac{d}{dt}(J\vec{\omega}).$$

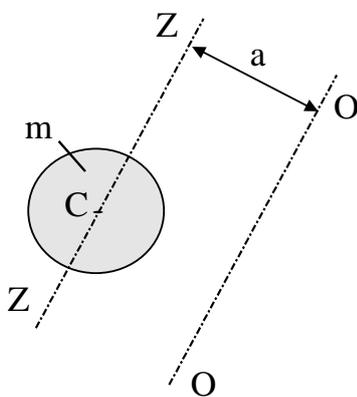


Рис. 2.4

Если момент инерции вращающегося тела постоянен, то

$$\vec{M}_z = J \frac{d\vec{\omega}}{dt} = J\vec{\epsilon}. \quad (2.19)$$

Это *основное уравнение динамики* вращательного движения тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.

**Теорема Штейнера** (рис.2.4): момент инерции тела относительно произвольной оси "O" равен сумме момента инерции

тела относительно оси “Z”, проходящей через центр масс “С” и параллельной данной, и произведения массы тела на квадрат расстояния  $a$  между осями.

$$J_0 = J_z + ma^2. \quad (2.20)$$

Кинетическая энергия вращающегося относительно неподвижной оси тела также зависит от его момента инерции:

$$K = \frac{J\omega^2}{2}. \quad (2.21)$$

Элементарная работа при вращении твердого тела

$$\delta A = M \cdot d\varphi, \quad (2.22)$$

где  $M$  - вращающий момент,  $d\varphi$  - угол поворота тела под действием момента  $M$ .

Из уравнения (2.15) вытекает *закон сохранения момента импульса для тела или системы тел*, вращающихся вокруг неподвижной оси. В самом деле, если для замкнутой системы  $\vec{M}_z = 0$ , то

$$\vec{L}_z = \sum_{i=1}^n J_i \vec{\omega}_i = \text{const} \quad (2.23)$$

где  $n$  - число тел системы.

То есть, если суммарный момент сил, действующий на тело или систему тел относительно оси вращения, равен нулю, то момент импульса этого тела или системы тел относительно оси вращения остается неизменным.

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 7(ф)

### Определение момента инерции диска с отверстием и расчет погрешностей

Цель работы. Измеряя геометрические размеры и массу диска, рассчитать его момент инерции.

#### Методика измерений

В работе момент инерции определяется для круглой тонкой металлической пластины (диска) радиусом  $R_1$  с круглым отверстием радиусом  $R_2$  (рис.2.5). Пластины изготовлены из разных материалов (сталь, латунь, сплав алюминия). Расчет момента инерции производится относительно оси  $OO$ , перпендикулярной плоскости диска и проходящей через его геометрический центр.

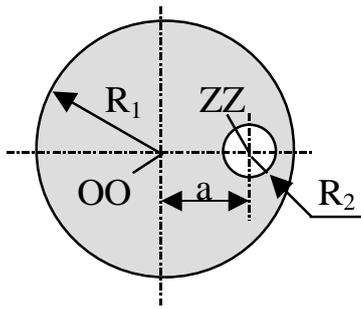


Рис. 2.5

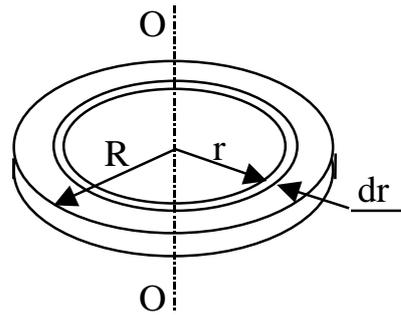


Рис. 2.6

Момент инерции (2.17) материальной точки массой  $m$  относительно оси, от которой она удалена на расстояние  $r$ , равен

$$J = mr^2. \quad (2.24)$$

Получим выражение для момента инерции  $J_0$  тонкого сплошного диска массой  $m$  и радиусом  $R$  относительно оси  $OO$ , перпендикулярной его плоскости и проходящей через его геометрический центр (рис.2.6).

Введем понятие поверхностной плотности массы  $\sigma$  диска:

$$\sigma = \frac{m}{\pi R^2}. \quad (2.25)$$

Представим, что система материальных точек сосредоточена внутри кольца радиусом  $r$  бесконечно малой ширины  $dr$ . Тогда площадь кольца  $ds = 2\pi r dr$ , а масса

$$dm = \sigma \cdot ds = \frac{2m r dr}{R^2}. \quad (2.26)$$

Момент инерции кольца относительно оси  $OO$ :

$$dJ_0 = r^2 dm = \frac{2m r^3 dr}{R^2}. \quad (2.27)$$

Для нахождения момента инерции диска относительно оси  $OO$  проинтегрируем выражение (2.27)

$$J_0 = \int_0^R dJ_0 = \frac{2m}{R^2} \int_0^R r^3 dr = \frac{mR^2}{2}. \quad (2.28)$$

Момент инерции диска с круглым отверстием (рис.2.5) можно определить как разность моментов инерции сплошного большого диска  $J'_0$  и малого диска  $J''_0$ , который занимал бы отверстие в большом диске и был сделан из того же материала и имел такую же толщину

$$J_0 = J'_0 - J''_0. \quad (2.29)$$

Момент инерции большого сплошного диска массой  $m_1$  согласно формуле (2.28) равен

$$J'_0 = \frac{m_1 R_1^2}{2}, \quad (2.30)$$

а малого диска массой  $m_2$  определяется по теореме Штейнера (2.20)

$$J''_0 = \frac{m_2 R_2^2}{2} + m_2 a^2. \quad (2.31)$$

Следовательно, из формул (2.29) – (2.31) имеем

$$J_0 = \frac{m_1 R_1^2}{2} - \left( \frac{m_2 R_2^2}{2} + m_2 a^2 \right) = \frac{1}{2} [m_1 R_1^2 - m_2 (R_2^2 + 2a^2)]. \quad (2.32)$$

Масса  $m$  диска с вырезом равна

$$m = m_1 - m_2 \quad (2.33)$$

и может быть определена с помощью технических весов.

Выразим  $m_1$  и  $m_2$  через массу  $m$  диска с вырезом. Для этого запишем  $m_1$ ,  $m_2$  и  $m$  через поверхностную плотность  $\sigma$  материала (2.25):

$$m_1 = \sigma \cdot S_1 \text{ и } m_2 = \sigma \cdot S_2,$$

где  $S_1 = \pi R_1^2$  и  $S_2 = \pi R_2^2$ .

Следовательно

$$m_1 = \sigma \cdot \pi R_1^2 \text{ и } m_2 = \sigma \cdot \pi R_2^2. \quad (2.34)$$

Подставляя (2.34) в (2.33), получаем выражение для массы диска с вырезом

$$m = \sigma \cdot \pi (R_1^2 - R_2^2). \quad (2.35)$$

Из (2.34) и (2.35) можно получить формулы для расчета масс  $m_1$  и  $m_2$  через массу  $m$ :

$$\frac{m_1}{m} = \frac{R_1^2}{R_1^2 - R_2^2} = \frac{1}{1 - (R_2/R_1)^2},$$

$$m_1 = \frac{m}{1 - (R_2/R_1)^2}; \quad (2.36)$$

$$\frac{m_2}{m} = \frac{R_2^2}{R_1^2 - R_2^2} = \frac{1}{(R_1/R_2)^2 - 1},$$

$$m_2 = \frac{m}{(R_1/R_2)^2 - 1}. \quad (2.37)$$

Подставляя  $m_1$  и  $m_2$  в формулу (2.32), получаем

$$J_0 = \frac{1}{2} \left[ \frac{mR_1^2}{1 - (R_2/R_1)^2} - \frac{m(R_2^2 + 2a^2)}{(R_1/R_2)^2 - 1} \right]. \quad (2.38)$$

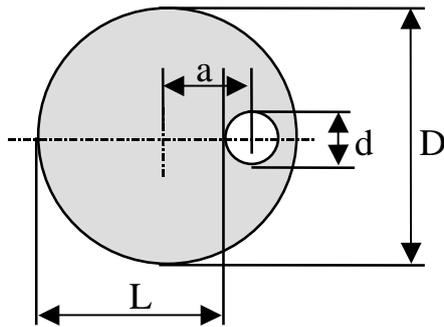


Рис. 2.7

Так как геометрический центр на диске не обозначен, то с помощью штангенциркуля измеряют не радиусы диска  $R_1$  и отверстия  $R_2$ , а их диаметры  $D = 2R_1$  и  $d = 2R_2$ . Расстояние между осями  $a$  определяют по измерениям, показанным на рис.2.7

$$a = L + \frac{d}{2} - \frac{D}{2}. \quad (2.39)$$

Тогда окончательно расчетная формула для момента инерции  $J_0$  диска с вырезом примет вид

$$J_0 = \frac{m}{8} \left[ \frac{D^2}{1 - (d/D)^2} - \frac{d^2 + 2(2L + d - D)^2}{(D/d)^2 - 1} \right] \quad (2.40)$$

### Экспериментальная установка

В состав экспериментальной установки входят:

- 1) диск с круглым отверстием.
- 2) штангенциркуль для измерения геометрических размеров диска,
- 3) технические весы и разновески для определения массы диска.

### Порядок выполнения работы

1. Измерить штангенциркулем (рис.2.7) диаметр диска  $D$  и отверстия  $d$  трижды с угловым смещением  $\sim 120^\circ$ . Результаты измерений записать в табл.2.1.

2. Измерить штангенциркулем размер  $L$  дважды с двух сторон диска.

3. Определить массу диска с вырезом  $m$  двукратным взвешиванием на весах, меняя местами диск и разновески.

4. Рассчитать средние арифметические значения  $\bar{D}$ ,  $\bar{d}$ ,  $\bar{L}$  и  $\bar{m}$ .

5. Используя средние значения  $\bar{D}$ ,  $\bar{d}$ ,  $\bar{L}$  и  $\bar{m}$ , по формуле (2.40) определить момент инерции диска с вырезом  $J_0$ .

Таблица 2.1

№ п.п	D м	ΔD м	$\overline{\Delta D^2}$ м <sup>2</sup>	d м	Δd м	$\overline{\Delta d^2}$ м <sup>2</sup>	L м	ΔL м	$\overline{\Delta L^2}$ м <sup>2</sup>	m кг	Δm кг	$\overline{\Delta m^2}$ кг <sup>2</sup>	J <sub>0</sub> кг·м <sup>2</sup>	ΔJ <sub>0гр</sub> кг·м <sup>2</sup>
1													—	
2													—	
3							—	—		—	—		—	
ср.														

6. Вычислить доверительную и относительную погрешность измерения по формулам (0.17) и (0.18).

### Контрольные вопросы

1. Вывести формулу для момента инерции сплошного диска относительно оси, проходящей через центр масс.
2. Как в работе определяется масса диска с вырезом и вырезанной части диска?
3. Как в работе измеряется расстояние между центром диска и осью отверстия?

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1

### Экспериментальное определение момента инерции вращающейся системы

Цель работы: измерение и теоретический расчет момента инерции системы тел и изучение вращательного движения твердого тела.

#### Методика измерений

Маятник Максвелла (рис.2.8) представляет собой диск, жестко посаженный на стержень и подвешенный на двух параллельных нитях (бифилярный подвес).

Намотав нити на стержень, маятник можно поднять на некоторую высоту  $h_0$ , то есть сообщить ему потенциальную энергию относительно нижнего положения, которое определяется длиной нити подвеса. В верхнем положении маятник освобождают. Силы и моменты сил, действующих на маятник, сообщают ему одновременно поступательное и вращательное движение. Считая данную физическую систему (подвес - маятник - Земля) замкнутой, запишем для нее закон сохранения энергии:

$$\frac{J\omega^2}{2} + \frac{mv^2}{2} + mgh = mgh_0, \quad (2.41)$$

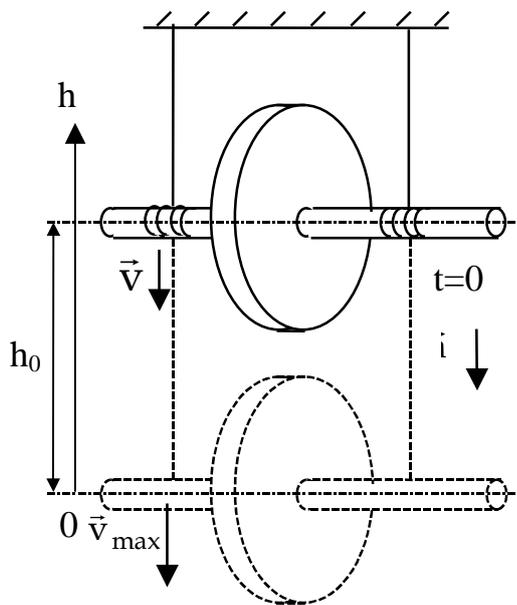


Рис. 2.8

где  $J$  - момент инерции маятника относительно оси стержня;  $m$  - масса маятника, равная массе диска 6 со стержнем 7 (см. рис.2.10) и массе сменного колеса 8;  $\omega$  - угловая скорость маятника;  $v$  - скорость центра масс;  $h_0$  - начальная высота подъема маятника.

Начальное состояние системы при  $t = 0$ :

$$h = h_0; v = 0; \omega = 0; U = mgh_0.$$

Конечное состояние системы:

$$h = 0; v = v_{\max}; \omega = \omega_{\max}; U = 0.$$

Легко показать, что при выполнении соотношения (2.41)

ускорение маятника  $a$  является постоянным. Для этого продифференцируем (2.41) по времени, учитывая, что скорость центра

масс  $v = -\frac{dh}{dt}$  связана с угловой скоростью маятника  $\omega$  и радиусом  $r$

стержня, на который наматывается нить, соотношением  $v = \omega r$ :

$$J\omega \frac{d\omega}{dt} + mv \frac{dv}{dt} + mg \frac{dh}{dt} = 0$$

или, разделив на  $v$ ,

$$\frac{J}{r^2} \frac{dv}{dt} + m \frac{dv}{dt} - mg = 0.$$

Следовательно, так как для данного маятника  $J$ ,  $m$  и  $r$  являются постоянными, ускорение  $a$  будет равно

$$a = \frac{dv}{dt} = g \frac{1}{1 + \frac{J}{mr^2}} = \text{const}, \quad (2.42)$$

При  $a = \text{const}$  и  $v = 0$  в выбранной системе отсчета (рис.2.8)

$$S = \frac{at^2}{2}, \quad (2.43)$$

где  $t$  - время падения маятника;  $S = (h_0 - h)$  - расстояние, пройденное телом за это время.

Из соотношений (2.42) и (2.43) находим момент инерции маятника:

$$J = mr^2 \left( \frac{gt^2}{2S} - 1 \right). \quad (2.44)$$

Из (2.44) видно, что, измерив непосредственно  $t$ ,  $S$ ,  $g$  и  $m$ , можно из данных опыта найти момент инерции тела. Однако электромагнит 13 (рис.2.10б), удерживающий маятник в начальном положении, обладает инерционностью. После выключения он продолжает удерживать диск еще некоторое время  $\Delta t$ . При одновременном включении миллисекундомера и размыкании цепи электромагнита отсчет времени начинается на  $\Delta t$  секунд раньше начального момента падения маятника. Измеренное значение времени падения получается завышенным. Эту систематическую ошибку можно исключить.

Запишем формулу (2.43) с учетом  $\Delta t$ , времени задержки тела электромагнитом:

$$S = \frac{a(t - \Delta t)^2}{2}$$

или

$$\sqrt{S} = \sqrt{\frac{a}{2}}(t - \Delta t). \quad (2.45)$$

Из (2.45) видно, что график зависимости  $\sqrt{S} = f(t)$  (рис.2.9) представляет собой прямую с угловым коэффициентом

$$k = \frac{\sqrt{S}}{t - \Delta t} = \sqrt{\frac{a}{2}}.$$

При этом величина  $\Delta t$  не влияет на наклон прямой, а значит, и на точность определения ускорения, которое будет равно

$$a = 2k^2. \quad (2.46)$$

Поэтому окончательную формулу для определения момента инерции запишем в виде

$$J_{\text{эсп}} = mr^2 \left( \frac{g}{a} - 1 \right), \quad (2.47)$$

где  $a$  - ускорение центра масс маятника, определяемое по наклону прямой (рис.2.9) из формулы (2.46);  $r$  - радиус стержня;  $m$  - масса маятника:  $m = m_0 + m_1$ ;  $m_0$  - масса диска 6 со стержнем 7 (указана на диске);  $m_1$  - масса сменного кольца 8 (указана на каждом кольце).

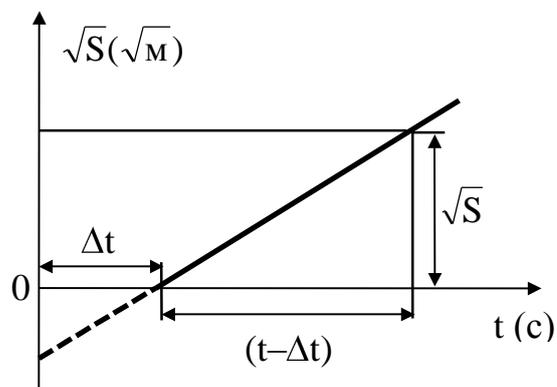


Рис. 2.9

## Экспериментальная установка

Общий вид экспериментальной установки показан на рис.2.10.

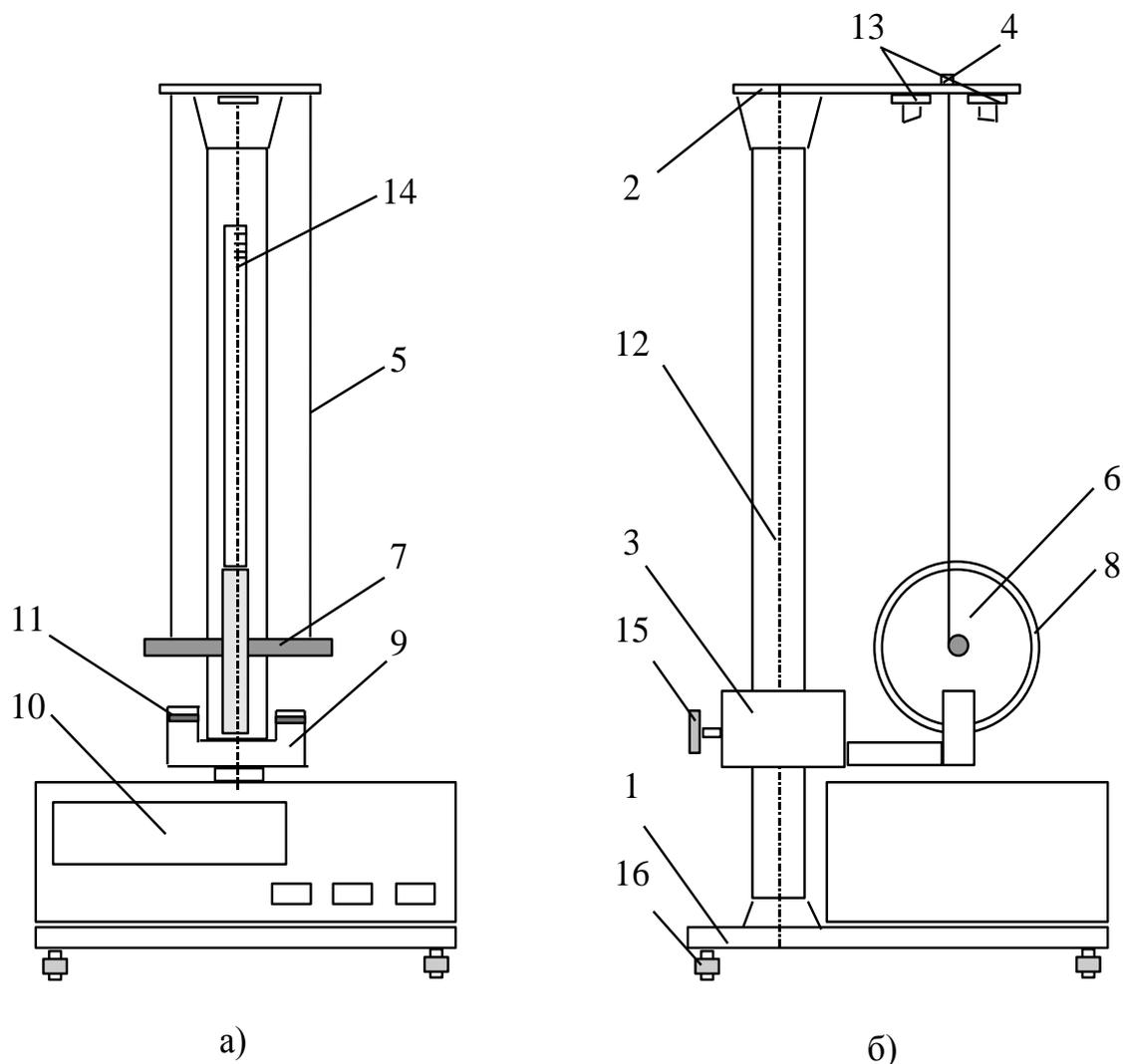


Рис. 2.10

На вертикальной стойке 12 основания 1 крепятся два кронштейна: верхний 2 и нижний 3. Верхний кронштейн снабжен электромагнитами 13 и устройством 4 для крепления и регулировки бифилярного подвеса 5. Маятник представляет собой диск 6, закрепленный на стержне 7, подвешенном на двух нитях. На диске крепятся сменные кольца 8. Масса сменных колес 8 указана на каждом кольце. Маятник со сменными кольцами фиксируется в верхнем исходном положении с помощью электромагнита.

На вертикальной стойке нанесена миллиметровая шкала 14, по которой определяется ход маятника.

Фотоэлектрический датчик 9 закреплен на кронштейне 3. Кронштейн 3 обеспечивает возможность перемещения фотодатчика

вдоль вертикальной стойки и его фиксирования зажимом 15 в любом месте шкалы в пределах (0 - 420) мм.

Фотодатчик 9 предназначен для выдачи электрических сигналов на миллисекундомер 10, который является прибором для измерения времени.

## Порядок выполнения работы

### Упражнение 1.

#### Экспериментальное определение момента инерции

1. Установить по высоте кронштейн 3 в крайнее нижнее положение так, чтобы его поверхность, окрашенная в красный цвет (служит указателем), совпадала с нижней отметкой шкалы 14 (цифра 40).

2. Надеть и закрепить сменное кольцо 8 на диск 6. Установить необходимую длину нити (с помощью устройства 4) так, чтобы нижняя кромка сменного кольца находилась на (4 - 5) мм ниже оптической оси (метка 11) фотодатчика. Ось маятника должна быть горизонтальной.

3. С помощью регулировки опор 16 добиться того, чтобы диск 6 на бифилярном подвесе находился посередине фотодатчика 9.

4. Нажать кнопку “Сеть” на панели миллисекундомера 10.

5. Накрутить нити на стержень 7 виток к витку и зафиксировать маятник в верхнем положении при помощи электромагнита 13. Нити подвеса в этом положении должны быть слегка ослабленными.

6. Установить индикатор отсчета времени на ноль, нажав кнопку “Сброс”.

Таблица 2.2

Кольцо № 1

№ п.п	S м	t с	$\bar{t}$ с	a м/с <sup>2</sup>	J <sub>эксп</sub> кг·м <sup>2</sup>
1					
2					
3					
1					
2					
3					
1					
2					
3					
1					
2					
3					

7. Нажать кнопку “Пуск”. Происходит выключение электромагнита и включение миллисекундомера. В момент пересечения маятником оптической оси фотодатчика отсчет времени прекращается.

8. Вновь поднявшийся маятник в верхнем положении задержать рукой и осторожно опустить вниз, размотав нить.

9. Записать время падения маятника  $t$  по миллисекундомеру, а также расстояние  $S$  между начальным и конечным положением маятника в табл.2.2.

10. Повторить еще два раза измерения по п.п. 4...9 и найти среднее значение времени движения груза  $\bar{t}$ .

11. Провести операции 2...10 для трех – пяти различных значений расстояния  $S$ , устанавливая его перемещением кронштейна 3. Для каждого значения расстояния  $S$  предварительно установить нужную длину подвеса (п.2).

12. Построить график зависимости  $\sqrt{S} = f(\bar{t})$ , откладывая по оси абсцисс среднее значение времени  $\bar{t}$  для каждого расстояния  $S$ . (рис. 2.9).

13. По наклону прямой определить ускорение маятника  $a = 2k^2$ .

14. По формуле (2.47) вычислить момент инерции.

15. Провести измерения (п.п. 1...14) с другим сменным кольцом и записать результаты измерения в табл.2.3.

Таблица 2.3

Кольцо № 2

№ п.п	S м	t с	$\bar{t}$ с	a м/с <sup>2</sup>	J <sub>эксп</sub> кг·м <sup>2</sup>
1					
2					
3					
1					
2					
3					
1					
2					
3					
1					
2					
3					

16. Рассчитать доверительную и относительную погрешность измерения для одного из опытов.

### Упражнение 2.

Теоретическое вычисление значения момента инерции маятника

На рис.2.11: 1 - стержень ( $m_1, r, 2L, J_1$ ); 2 - диск ( $m_2, R_1, J_2$ ); 3 - сменное кольцо ( $m_3, R_1, R_2, J_3$ ).

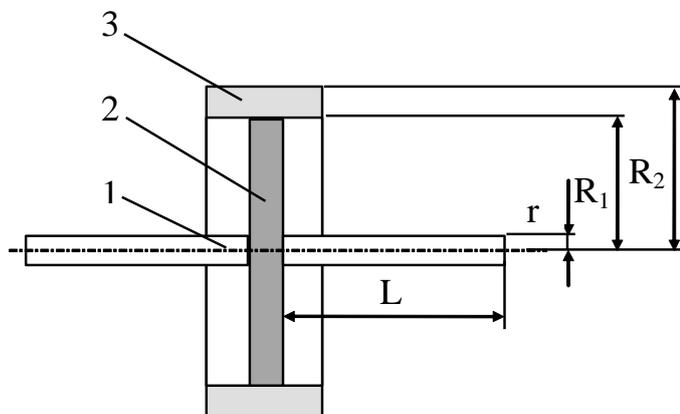


Рис. 2.11

Момент инерции стержня:  $J_1 = \frac{1}{2} m_1 r^2$ .

Момент инерции диска:  $J_2 = \frac{1}{2} m_2 R_1^2$ .

Момент инерции сменного кольца:  $J_3 = \frac{1}{2} m_3 (R_1^2 + R_2^2)$ .

Массу  $m_1$  или  $m_2$  определяют по известной плотности материала ( $\rho = 2700 \text{ кг/м}^3$ ) и соответствующим геометрическим размерам.

Для всех лабораторных установок  $m_0 = m_1 + m_2$ ;  $m_0 = 0,135 \text{ кг}$ ,  
 $J_{\text{теор}} = J_1 + J_2 + J_3$ .

Радиусы  $R_1$  и  $R_2$  и другие необходимые размеры измеряют штангенциркулем. Масса  $m_3$  указана на каждом сменном кольце (или сообщается лаборантом).

Сравнение расчетных и экспериментальных результатов:

$$\frac{\Delta J}{J_{\text{теор}}} = \frac{J_{\text{теор}} - J_{\text{эксп}}}{J_{\text{теор}}} \cdot 100\%.$$

### Контрольные вопросы

1. Сформулируйте закон сохранения энергии для движения маятника.
2. Как определяется момент инерции маятника?
3. Как теоретически подсчитывают момент инерции диска и чему он равен?
4. Для чего в опытах используется электромагнит?

5. Какая существует связь между моментом силы и угловым ускорением для равноускоренного движения диска, момент инерции которого  $J$ ?

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3

### Изучение динамики вращательного движения

Цель работы: изучение основного уравнения динамики вращательного движения твердого тела и определение момента инерции тел.

#### Методика измерений

Принцип работы установки иллюстрирует действие основного уравнения динамики вращательного движения твердого тела (2.19):

$$\vec{M} = J\vec{\varepsilon}, \quad (2.48)$$

где  $M$  - вращающий момент;  $J$  - момент инерции тела относительно оси вращения;  $\varepsilon$  - угловое ускорение вращающегося тела.

Маятник (маятник Обербека), используемый в работе, представляет собой маховик крестообразной формы (рис.2.12).

По четырем взаимно перпендикулярным стержням могут перемещаться грузы 11 массой  $m_1$  каждый. На общей оси находится шкив, на который наматывается нить, перекинутая через другой шкив 5. На конце нити перемещается “падающая” масса  $m$  (8).

Под действием “падающей” массы  $m$  нить разматывается и приводит маховик в равноускоренное вращательное движение, при этом угловое ускорение крестовины:

$$\varepsilon = \frac{a}{r}, \quad (2.49)$$

где  $a$  - линейное ускорение массы  $m$ ;  $r$  - радиус шкива.

Для равноускоренного движения смещение массы  $m$ :

$$h = \frac{at^2}{2}, \quad (2.50)$$

откуда находим

$$a = \frac{2h}{t^2}; \quad (2.51)$$

$$\varepsilon = \frac{2h}{t^2 r}; \quad (2.52)$$

где  $h$  - смещение массы  $m$ ,  $t$  - время движения массы  $m$ .

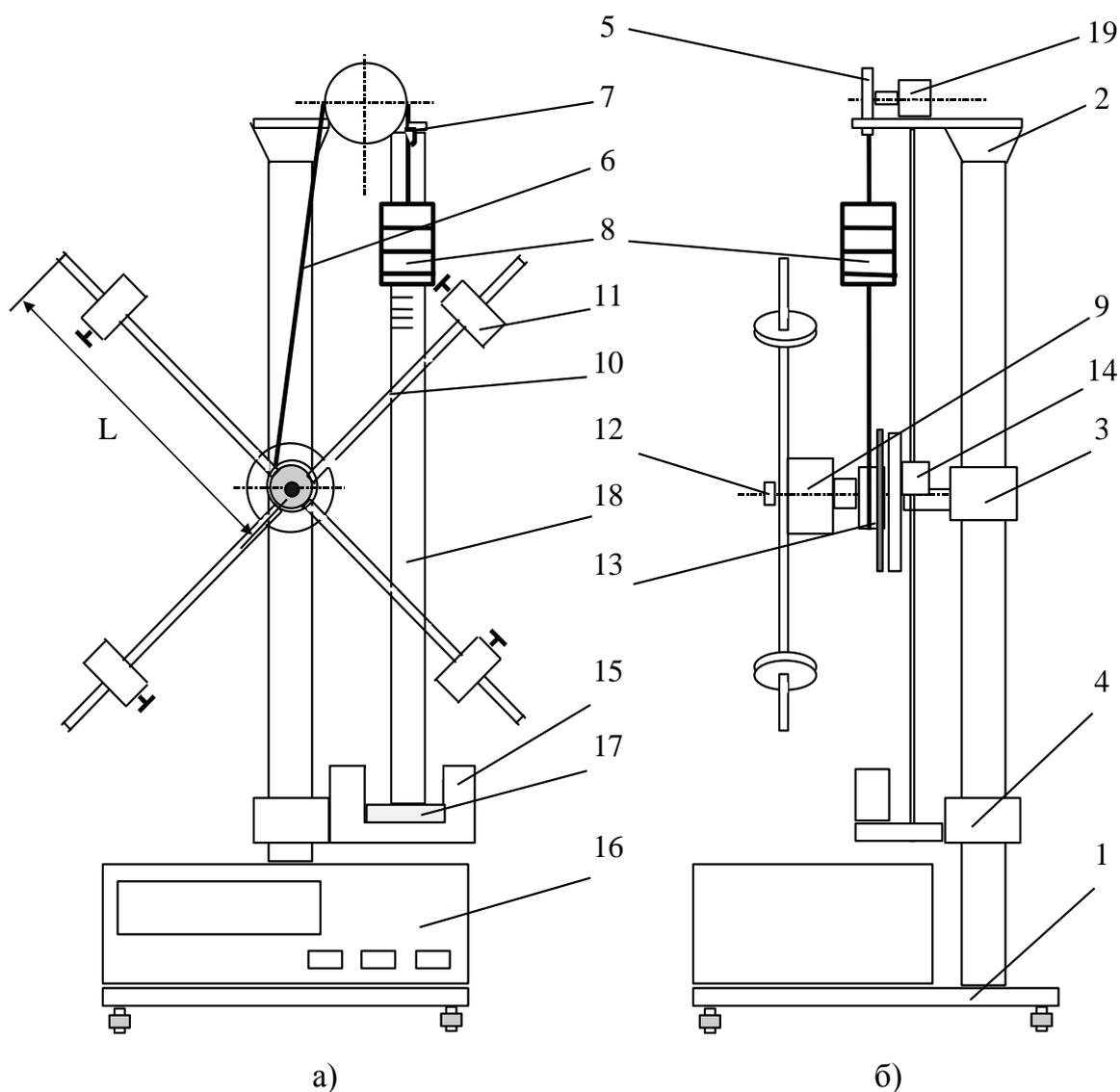


Рис. 2.12

Момент силы  $F$ , приложенной к шкиву, по определению

$$M = F \cdot r. \quad (2.53)$$

Сила  $F$  (натяжение нити) может быть найдена из уравнения динамики поступательного движения массы  $m$ , подвешенной на нити (рис.2.13):  $ma = mg - F$ , поэтому  $F = m(g - a)$  и

$$M = m(g - a)r, \quad (2.54)$$

Используя формулу (2.48) и вычисляя из опыта  $h$  и  $t$ , можем записать расчетную формулу для экспериментального определения момента инерции крестовины:

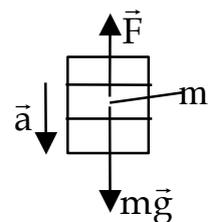


Рис. 2.13

$$J_{\text{эксп}} = \frac{M}{\varepsilon} = \frac{m \left( g - \frac{2h}{t^2} \right) r^2 t^2}{2h}. \quad (2.55)$$

Теоретическое значение момента инерции крестовины

$$J_{\text{теор}} = J_0 + 4m_1 R^2 + 4 \frac{m_2 L^2}{3}, \quad (2.56)$$

где  $J_0$  - суммарный момент инерции двухступенчатого шкива, оси и бобышки крестовины;  $4m_1 R^2$  - момент инерции передвижных грузов крестовины;  $R$  - расстояние от оси вращения до центра массы  $m_1$ ;  $m_1$  - масса передвижных грузов;  $\frac{4m_2 L^2}{3}$  - момент инерции всех четырех стержней крестовины без грузов  $m_1$ ;  $L$  - длина стержня;  $m_2$  - масса стержней.

### Экспериментальная установка

Общий вид маятника изображен на рис.2.12. На вертикальной стойке крепятся три кронштейна: верхний 2, средний 3 и нижний 4. Положение всех кронштейнов на вертикальной стойке строго зафиксировано.

На верхнем кронштейне 2 крепится блок 5 изменения направления движения эластичной нити 6, на которой подвешен крючок 7 с грузами 8. Вращение блока 5 осуществляется в узле подшипников 19, который дает возможность уменьшить трение.

На среднем кронштейне 3 крепится электромагнит 14, который удерживает систему с грузами в неподвижном состоянии. На этом же кронштейне расположен узел подшипников 9, на оси которого с одной стороны закреплен двухступенчатый шкив 13, на котором имеется приспособление для закрепления нити 6. На другом конце оси находится крестовина 10, представляющая собой четыре металлических стержня с нанесенными на них рисками через каждые 10 мм, закрепленных в бобышке 12 под прямым углом друг к другу.

На каждом стержне могут свободно перемещаться и фиксироваться грузы 11, что дает возможность ступенчатого изменения момента инерции крестовины маятника. На нижнем кронштейне 4 крепится фотоэлектрический датчик 15, который выдает электрический сигнал на миллисекундомер 16 для окончания счета промежутков времени. На этом же кронштейне крепится резиновый амортизатор 17, о который ударяется груз при остановке.

Маятник снабжен миллиметровой линейкой 18, по которой определяется начальное и конечное положение грузов, а следовательно, и пройденный путь. Миллисекундомер 16 с цифровой индикацией времени закреплен на основании 1.



7. Произвести отсчет времени  $t$  движения маятника по миллисекундомеру. Записать измеренные значения  $t$  и  $h$  в табл.2.4.

8. Повторить измерения по п.п. 3...7 еще два раза и определить среднее значение времени  $\bar{t}$ .

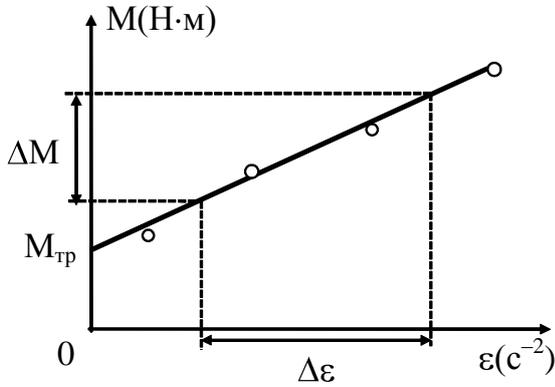


Рис.2.14

9. Повторить опыты по п.п. 1...8, добавляя по одному грузу на основной груз, не меняя положения грузов на крестовине.

10. Для средних значений времени  $\bar{t}$  рассчитать все значения ускорения  $a$  по формуле (2.51) и вращающего момента  $M$  по формуле (2.54). Определить угловое ускорение  $\epsilon$  по формуле (2.52).

11. Результаты измерений представить в виде графика, отложив по горизонтальной оси  $\epsilon$ , а по вертикальной оси –  $M$  (рис.2.14). С помощью графика определить момент инерции системы  $J$ , как угловой коэффициент построенного графика  $\left( J = \frac{\Delta M}{\Delta \epsilon} \right)$ , где  $\Delta M$  и  $\Delta \epsilon$  соответствуют друг другу.

Таблица 2.5

Большой шкив  $r_2 = 4$  см

№ п.п	$m$ кг	$h$ м	$t$ с	$\bar{t}$ с	$a$ м/ с <sup>2</sup>	$M$ Н· м	$\epsilon$ с <sup>-2</sup>	$J_{\text{эк}}$ сп кг ·м <sup>2</sup>	$M$ тр Н· м
1									
2									
3									
1									
2									
3									
1									
2									
3									
1									
2									
3									

12. Найти момент силы трения  $M_{\text{тр}}$  ( $M_{\text{тр}}$  равен координате точки пересечения графика с осью  $M$ ) (рис.2.14).

13. Прodelать те же измерения для шкива другого радиуса ( $r_2 = 4$  см) и снова определить  $J$  и  $M_{\text{тр}}$ . Результаты измерений занести в табл.2.5.

14. Выключить установку, нажав на кнопку “Сеть”.

15. Рассчитать доверительную и относительную погрешность результата измерений момента инерции для одной серии опытов.

### Контрольные вопросы

1. Напишите закон сохранения энергии применительно к данной работе.

2. Получите формулу для расчета вращающего момента  $M$ .

3. Что такое центр тяжести?

4. Чему равен момент сил тяжести всех частиц тела относительно любой горизонтальной оси, проходящей через центр тяжести?

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 6

### Определение момента инерции тела и скорости полета “пули”

Цель работы: изучение динамики вращательного движения твердого тела с помощью крутильного маятника.

#### Методика измерений

Рассмотрим систему, состоящую из “пули” и маятника (рис.2.15). “Пуля” выстреливается в маятник и застревает в пластине, вызывая отклонение маятника. Удар считается абсолютно неупругим, отклонение маятника от положения равновесия за время соударения незначительным. Механическая энергия системы при неупругом ударе уменьшается.

Сила тяжести маятника уравновешивается силой реакции подвеса. Кроме этой силы при ударе возникают горизонтальные силы в местах крепления проволок, препятствующие смещению оси маятника. Действие этих горизонтальных сил приводит к изменению импульса системы. В то же время моменты указанных сил относительно оси вращения маятника равны нулю, поскольку линии их действия проходят через ось.

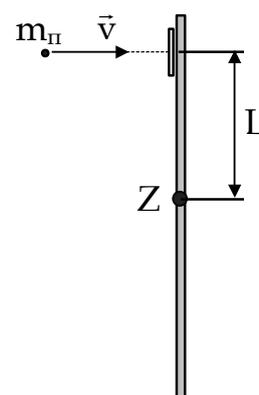


Рис. 2.15  
(Вид сверху)

Следовательно, для системы маятник - “пуля” можно применить закон сохранения момента импульса (2.23):

$$m_{\text{п}}vL = J\omega \quad (2.57)$$

Величина слева - это момент импульса системы до удара, справа - после удара;  $m_{\text{п}}$  - масса “пули”;  $v$  - ее скорость;  $L$  - расстояние от оси маятника до центра “пули” в момент удара (считается, что “пуля” летела перпендикулярно к оси стержня маятника);  $J$  - момент инерции маятника с прилипшей к нему пулей;  $\omega$  - угловая скорость маятника сразу после удара.

Рассмотрим вращательное движение маятника после удара. Пренебрегая трением, можно применить для данного этапа закон сохранения механической энергии. Тогда кинетическая энергия маятника сразу после удара равна потенциальной энергии упругой деформации проволок в момент максимального отклонения маятника:

$$\frac{J\omega^2}{2} = \frac{c\varphi^2}{2}. \quad (2.58)$$

Здесь  $\varphi$  - максимальный угол отклонения маятника,  $c$  - коэффициент возвращающего момента, используемый при описании деформации кручения. Для расчета коэффициента  $c$  используется соотношение:

$$c = c_1 + c_2 = \frac{\pi G}{2} \left( \frac{R_1^4}{l_1} + \frac{R_2^4}{l_2} \right), \quad (2.59)$$

где  $c_1$ ,  $R_1$ ,  $l_1$  - коэффициент возвращающего момента, радиус и длина нижней проволоки;  $c_2$ ,  $R_2$ ,  $l_2$  - то же для верхней проволоки;  $G$  - модуль сдвига материала проволок: для стали  $G = 8 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>.

При расчете момента инерции маятника после удара моментом инерции “пули” можно пренебречь, тогда

$$J = J_{\text{м}} + 2J_{\text{г}}, \quad (2.60)$$

где  $J_{\text{м}}$  - момент инерции маятника без грузов,  $J_{\text{г}}$  - момент инерции груза 3 (рис.2.16) относительно оси маятника  $Z$ .

По теореме Штейнера (2.20):

$$J_{\text{г}} = J_0 + ma^2 = m \left( \frac{r^2}{4} + \frac{h^2}{12} \right) + ma^2. \quad (2.61)$$

Здесь  $J_0$  - момент инерции груза относительно оси, проходящей через его центр и параллельной оси маятника,  $r$  - радиус груза (диска),  $h$  - толщина диска,  $a$  - расстояние от его центра масс до оси маятника  $Z$ ,  $m$  - масса груза (рис.2.16).

Используя соотношения (2.60) и (2.61), получим выражения для расчета моментов инерции маятника при двух положениях грузов

$$\begin{aligned} J_1 &= J_M + 2m \left( \frac{r^2}{4} + \frac{h^2}{12} + a_1^2 \right) \\ J_2 &= J_M + 2m \left( \frac{r^2}{4} + \frac{h^2}{12} + a_2^2 \right). \end{aligned} \quad (2.62)$$

Здесь и далее индекс 1 соответствует минимальному расстоянию между грузами, индекс 2 - максимальному.

Запишем закон сохранения момента импульса (2.57) для двух положений грузов

$$\begin{aligned} m_{\text{п}} vL &= J_1 \omega_1 \\ m_{\text{п}} vL &= J_2 \omega_2. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Запишем закон сохранения энергии (2.58) для минимального и максимального расстояния между грузами

$$\begin{aligned} \frac{J_1 \omega_1^2}{2} &= \frac{c \varphi_1^2}{2} \\ \frac{J_2 \omega_2^2}{2} &= \frac{c \varphi_2^2}{2}. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Решая совместно уравнения (2.62) - (2.64), получаем формулу для расчета момента инерции маятника

$$J_M = \frac{2m(a_2^2 \varphi_2^2 - a_1^2 \varphi_1^2)}{\varphi_1^2 - \varphi_2^2} - 2m \left( \frac{r^2}{4} + \frac{h^2}{12} \right). \quad (2.65)$$

Решая систему уравнений (2.63) и (2.64), получаем выражение для расчета скорости пули

$$v = \frac{\varphi_1 \sqrt{J_1 c}}{m_{\text{п}} L}. \quad (2.66)$$

### Экспериментальная установка

Общий вид установки показан на рис. 2.16.

Основным элементом установки является маятник. Он представляет собой горизонтальный стержень 7, закрепленный на вертикальной проволоке 6, натянутой между кронштейнами 5 установки. Вдоль стержня могут перемещаться два груза 3 массой  $m = 0,18$  кг каждый. Винты 4 служат для закрепления грузов в определенном положении.

На концах стержня находятся пластины 1, покрытые с одной стороны пластилином. На торце пластины находится вертикальная черта, которая служит индикатором для шкалы на прозрачном экране

2, закрывающем маятник, при определении положения и угла отклонения маятника от положения равновесия. На пластине имеются деления, показывающие расстояние от оси подвеса маятника. На самом стержне 7 нанесены поперечные штрихи на расстоянии 1 см друг от друга, первый на расстоянии 0,02 м от оси.

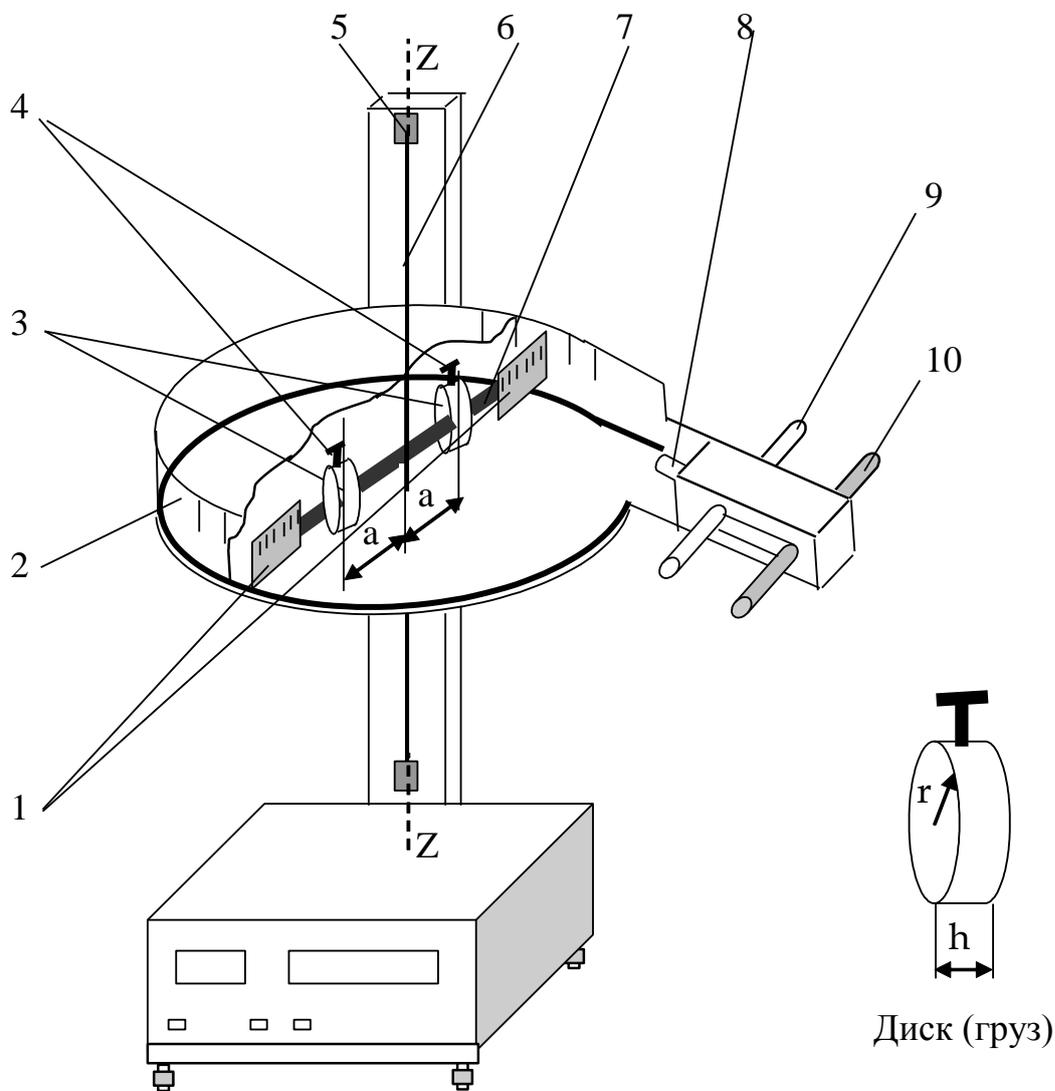


Рис. 2.16

«Пистолет» служит для стрельбы «пулями» (алюминиевыми кольцами). Мишенями являются пластины 7 маятника. В пистолете имеются две пары ручек - неподвижные 9 подвижные 10. Последние соединены со стержнем 8 на который помещается «пуля».

## Порядок выполнения работы

### Упражнение 1.

Определение момента инерции крутильного маятника

1. Установить грузы маятника симметрично оси  $Z$  на минимальном расстоянии друг от друга, измерить расстояние от оси проволоки до центра груза  $a_1$  по шкале маятника. Результат этого и последующих измерений заносить в табл.2.6.

2. Замерить по шкале на кожухе угловое положение неподвижного маятника  $\beta_0$ . Абсолютная величина  $\beta_0$  не должна превышать  $5^\circ$ .

Таблица 2.6

№ п/п	$a_1 =$				$a_2 =$		
	$\beta_0$ град	$\beta$ град	$\varphi_1$ град	L м	$\beta_0$ град	$\beta$ град	$\varphi_2$ град
1							
2							
3							
4							
Среднее	—	—			—	—	

3. Зарядить “пистолет”:

а) сдвинуть ручки 9 вперед до упора;

б) Повернуть ручки 9 и поместить на стержень “пулю”;

в) Вернуть ручки 9 в горизонтальное положение и оттянуть их назад до щелчка.

4. Убедившись, что маятник неподвижен, произвести выстрел, наклонив ручки 9. Произвести отсчет максимального угла поворота маятника  $\beta$ . Рассчитать угол отклонения маятника по формуле  $\varphi_1 = \beta - \beta_0$ .

5. Измерить по шкале маятника расстояние L от следа пули до оси маятника Z.

6. Повторить измерения п.п 2...5 не менее 4-х раз.

7. Рассчитать среднее значение максимального угла отклонения маятника  $\bar{\varphi}_1$ , как среднее арифметическое нескольких значений  $\varphi_1$ , и среднее значение расстояния  $\bar{L}$ .

8. Установить грузы маятника на максимальном расстоянии друг от друга, измерить  $a_2$  по шкале маятника.

9. Произвести измерения по п.п 2...4 не менее 4 раз и рассчитать угол отклонения маятника по формуле  $\varphi_2 = \beta - \beta_0$ .

10. Рассчитать среднее значение максимального угла отклонения  $\bar{\varphi}_2$  при данном положении грузов.

11. Измерить толщину груза  $h$  по шкале маятника и радиус грузов  $r$  при помощи штангенциркуля.

12. Рассчитать момент инерции маятника по формуле (2.65), подставляя полученные значения углов  $\bar{\varphi}_1$  и  $\bar{\varphi}_2$  **в радианах**.

13. Рассчитать доверительную и относительную погрешность результата.

## Упражнение 2.

### Определение скорости полета пули

1. Измерить длины проволок  $l_1$  и  $l_2$  и их диаметры  $D_1 = 2R_1$  и  $D_2 = 2R_2$ .
2. По формуле (2.59) рассчитать коэффициент возвращающего момента  $c$ .
3. Используя выражение (2.62), рассчитать момент инерции маятника с грузами  $J_1$ . Данные, необходимые для расчета получены в первом упражнении, масса “пули”  $m_{\text{п}} = 0.75$  г.
4. По формуле (2.66) для средних значений  $\bar{L}$  и  $\bar{\varphi}_1$  рассчитать среднюю скорость полета пули  $v$  (подставляя  $\bar{\varphi}_1$  в радианах).
5. Рассчитать доверительную и относительную погрешность определения скорости пули.

### Контрольные вопросы

1. Почему систему крутильный маятник - “пуля” можно считать изолированной?
2. Записать формулы для кинетической энергии вращающегося тела и потенциальной энергии закрученной проволоки.
3. Что такое коэффициент возвращающего момента?
4. Как можно определить момент инерции маятника?

### Вопросы по разделу 2

1. Кинематические характеристики вращательного движения тела.
2. Нормальное и тангенциальное ускорение тела.
3. Понятие момента силы относительно неподвижной точки. Каковы единицы измерения момента силы?
4. Момент импульса относительно неподвижной точки. Уравнение моментов.
5. Закон сохранения момента импульса для системы материальных точек.
6. Понятие момента силы относительно оси.
7. Понятие момента импульса твердого тела относительно оси.
8. Написать основное уравнение динамики вращательного движения.
9. Что такое момент инерции тела? Каков его физический смысл?
10. Расчет момента инерции стержня относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно стержню.
11. Расчет момента инерции диска относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости диска.
12. Теорема Штейнера, пример ее применения.
13. Кинетическая энергия вращающегося тела.
14. Закон сохранения момента импульса для твердого тела, вращающегося относительно неподвижной оси.

## РАЗДЕЛ 3

### Механические колебания и волны

#### *3.1 Незатухающие гармонические колебания. Маятники*

Колебаниями называются процессы, характеризующиеся той или иной степенью повторяемости во времени. По физической природе колебания могут быть механическими, электромагнитными и др. Колебания называются периодическими, если значения физических величин, характеризующих состояние системы, повторяются через равные промежутки времени. Минимальный из этих промежутков называется периодом колебаний  $T$ . За период колебаний совершается одно полное колебание. Число полных колебаний, совершаемых в единицу времени, называется частотой колебаний

$$f = \frac{1}{T}. \quad (3.1)$$

Величина

$$\omega = 2\pi f \quad (3.2)$$

называется круговой или циклической частотой колебаний.

Из (3.1) и (3.2) следует, что круговая частота и период колебаний связаны следующим образом:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (3.3)$$

При периодических колебаниях величины  $x$  в любой момент времени  $t$  выполняется соотношение  $x(t) = x(t + T)$ .

Гармоническим колебательным движением называется периодическое движение, при котором смещение точки от положения равновесия в зависимости от времени  $t$  изменяется по закону синуса (или косинуса):

$$x = A \sin(\omega_0 t + \alpha), \quad (3.4)$$

где  $A$  - амплитуда колебания - максимальное абсолютное значение  $x$ ;  $\omega_0$  - круговая частота гармонических колебаний;  $(\omega_0 t + \alpha)$  - фаза колебания;  $\alpha$  - начальная фаза - фаза колебаний в момент времени  $t = 0$ . Значения амплитуды  $A$  и начальной фазы  $\alpha$  полностью определяются начальными условиями системы.

Скорость  $v$  и ускорение  $a$  при гармонических колебаниях изменяются по законам

$$v = \frac{dx}{dt} = \dot{x} = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \alpha); \quad (3.5)$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} = -A\omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \alpha). \quad (3.6)$$

Из выражений (3.6) и (3.4) получим

$$a = -\omega_0^2 x, \quad (3.7)$$

откуда следует, что при гармонических колебаниях ускорение прямо пропорционально смещению точки от положения равновесия и всегда направлено противоположно ему.

Из уравнений (3.6) и (3.7) получаем

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (3.8)$$

Выражение (3.8) называется *дифференциальным уравнением гармонических колебаний*, а функция (3.4) является решением этого уравнения. Подставив (3.7) во второй закон Ньютона  $\vec{F} = m\vec{a}$ , определим силу, под действием которой происходят гармонические колебания:

$$F = -m\omega_0^2 x. \quad (3.9)$$

Видно, что гармонические колебания обусловлены возвращающими силами, прямо пропорциональными смещению точки от положения равновесия и направленными противоположно смещению.

Введем обозначение

$$m\omega_0^2 = k. \quad (3.10)$$

Тогда при гармонических колебаниях

$$\vec{F} = -k\vec{x}; \quad (3.11)$$

величина  $k$  называется коэффициентом возвращающей силы. Физический смысл  $k$  можно выяснить из уравнения (3.11). Коэффициент возвращающей силы численно равен возвращающей силе, вызывающей смещение  $x$ , равное единице.

Уравнению (3.11) подчиняются, например, упругие силы пружин. Колебания систем, происходящие под действием сил, удовлетворяющих уравнению (3.11), называются собственными.

Из соотношений (3.10) и (3.3) можно найти круговую частоту и период гармонических колебаний системы, происходящих под действием возвращающих сил

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}; \quad (3.12)$$

$$T_0 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}; \quad (3.13)$$

величины  $\omega_0$  и  $T_0$  зависят только от устройства колебательной системы.

В процессе гармонических колебаний полная механическая энергия системы в любой момент времени складывается из кинетической  $K$  и потенциальной  $U$ .

Кинетическая энергия  $K = \frac{mv^2}{2}$ . Потенциальная энергия равна работе, которую производит упругая (квазиупругая) возвращающая сила при уменьшении смещения от  $x$  до  $0$ , следовательно,

$$U = \int_x^0 F dx = - \int_x^0 kx dx = \frac{kx^2}{2}. \quad (3.14)$$

Полная энергия

$$E = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2}. \quad (3.15)$$

Подставляя в формулу (3.15) выражения смещения  $x$  (3.4), скорости  $v$  (3.5) и используя (3.10), находим

$$E = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2}. \quad (3.16)$$

Из выражения (3.16) видно, что при гармонических колебаниях энергия системы - постоянная величина, прямо пропорциональная квадрату амплитуды колебаний.

Одной из простейших колебательных систем является легкая спиральная пружина, к которой подвешен груз массой  $m$  (рис.3.1). Если вывести груз из положения равновесия, немного растянув пружину, и предоставить ее самой себе, то на груз будет действовать упругая (возвращающая) сила пружины, прямо пропорциональная смещению  $x$  и направленная в сторону, противоположную смещению:  $F = -kx$ ; коэффициент возвращающей силы  $k$  в этом случае часто называют жесткостью пружины. Под действием силы  $F$  тело совершает собственные гармонические колебания, которые можно наблюдать при малом сопротивлении среды.

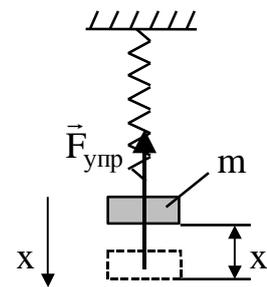


Рис. 3.1

Напишем второй закон Ньютона применительно к поступательному колебательному движению груза на пружине

$$m\ddot{x} = -kx,$$

или

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0. \quad (3.17)$$

Это уравнение того же типа, что и уравнение (3.8), и решением его является функция, представленная уравнением (3.4). Следовательно, груз на пружине совершает гармонические колебания при условии, если сила сопротивления пренебрежимо мала. Круговая частота  $\omega_0$  этих собственных колебаний и период  $T_0$  выражаются формулами (3.12) и (3.13).

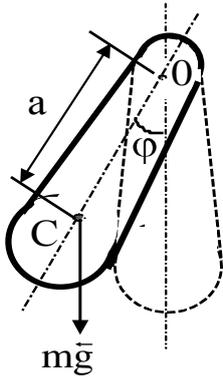


Рис. 3.2

Физическим маятником называется твердое тело, способное совершать колебания вокруг неподвижной точки, не совпадающей с его центром масс. В положении равновесия центр масс маятника С находится под точкой подвеса маятника О, на одной с ней вертикальной оси (рис.3.2). При отклонении маятника от положения равновесия на угол  $\varphi$  возникает вращающий момент, стремящийся вернуть маятник в положение равновесия. Величина этого момента

$$M = mga \sin \varphi,$$

где  $m$  - масса маятника,  $a$  - расстояние между точкой подвеса и центром масс маятника,  $a \sin \varphi$  - плечо силы тяжести.

При небольших углах отклонения, когда  $\sin \varphi \approx \varphi$ , вектор возвращающего момента будет равен

$$\vec{M} = -mga\vec{\varphi}. \quad (3.18)$$

В этом случае возвращающий момент силы тяжести прямо пропорционален угловому смещению  $\varphi$  маятника от положения равновесия. Согласно основному уравнению динамики вращательного движения

$$\vec{M} = J\vec{\varepsilon}, \quad (3.19)$$

где  $M$  - момент силы, вызывающий вращение маятника;  $J$  - момент инерции маятника относительно оси вращения;  $\varepsilon$  - угловое ускорение.

Подставив в уравнение (3.19) значение  $M$  из уравнения (3.18) и

$\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$ , получим

$$J \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mga\varphi,$$

откуда

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{mga}{J}\varphi = 0. \quad (3.20)$$

Уравнение (3.20) - дифференциальное уравнение гармонических колебаний физического маятника. Этому уравнению тождественно удовлетворяет функция

$$\varphi = \varphi_0 \sin \omega_0 t, \quad (3.21)$$

где  $\omega_0 = \sqrt{\frac{mga}{J}}$ .

В этом можно убедиться подстановкой значений  $\varphi$  и  $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$  в уравнение (3.20).

Используя связь между угловой частотой  $\omega_0$  гармонических колебаний и периодом, получаем:

$$T_0 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{J}{mga}}. \quad (3.22).$$

Частным случаем физического маятника является математический маятник - материальная точка, подвешенная на невесомой нерастяжимой нити длиной  $L$ . Для математического маятника момент инерции  $J = mL^2$ , а расстояние  $a = L$ .

Следовательно, период колебаний математического маятника равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad (3.23)$$

В ряде случаев колеблющееся тело совершает не поступательное, а вращательное движение. К числу таких колебаний относятся, например, крутильные колебания тела, подвешенного на легкой упругой проволоке, относительно оси симметрии тела, совпадающей с проволокой (рис.3.3).

При повороте тела от положения равновесия в горизонтальной плоскости на небольшой угол  $\varphi$  в проволоке возникает возвращающий момент упругих сил, прямо пропорциональный углу закручивания:

$$\vec{M} = -c\vec{\varphi}, \quad (3.24)$$

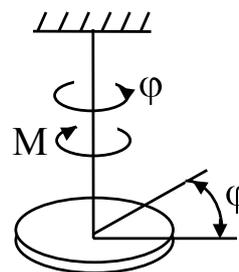


Рис.3.3

где  $c$  - коэффициент возвращающего момента. Физический смысл коэффициента  $c$  находим из соотношения (3.24). Коэффициент возвращающего момента численно равен моменту возвращающей силы при угловом смещении тела от положения равновесия на угол, равный единице. Величина  $c$  зависит от материала проволоки и ее размеров

$$c = \frac{\pi G}{2} \cdot \frac{r^4}{L}, \quad (3.25)$$

где  $G$  - модуль сдвига, характеризующий упругие свойства материала проволоки;  $r$  - радиус проволоки;  $L$  - длина проволоки.

Напишем основное уравнение вращательного движения для тела, совершающего гармонические колебания относительно некоторой оси:

$$J\ddot{\varphi} = \vec{M} \quad (3.26)$$

где  $J$  - момент инерции колеблющегося тела;  $\ddot{\varphi} = \varepsilon$  - угловое ускорение.

Из выражений (3.24) и (3.26) получаем *дифференциальное уравнение гармонических крутильных колебаний*, подобное уравнению (3.8):

$$\ddot{\varphi} + \frac{c}{J}\varphi = 0. \quad (3.27)$$

Решением уравнения (3.27) является функция, аналогичная (3.4):

$$\varphi = \varphi_0 \sin(\omega_0 t + \alpha) \quad (3.28)$$

где  $\varphi$  - угловое смещение от положения равновесия;  $\varphi_0$  - амплитуда колебаний.

Угловая скорость  $\omega$  и угловое ускорение  $\varepsilon$  тела при собственных крутильных колебаниях изменяются по законам:

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_0 \varphi_0 \cos(\omega_0 t + \alpha), \\ \varepsilon &= -\omega_0^2 \varphi_0 \sin(\omega_0 t + \alpha). \end{aligned}$$

Сопоставляя уравнения (3.27) и (3.8), получаем значения угловой частоты  $\omega_0$  и периода  $T_0$  собственных крутильных гармонических колебаний тела, происходящих под действием упругого возвращающего момента:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{J}}; \quad (3.29)$$

$$T_0 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{J}{c}}. \quad (3.30)$$

### 3.2 Затухающие колебания

Всякое колебание материальной точки, не поддерживаемое извне, затухает из-за наличия сил сопротивления. Амплитуда таких колебаний с течением времени уменьшается.

Рассмотрим случай, когда материальная точка колеблется в вязкой среде при малых скоростях. Сила сопротивления среды в этом случае прямо пропорциональна скорости и направлена в сторону, противоположную ей:

$$\vec{F}_{\text{сопр}} = -r\vec{v} = -r\dot{\vec{x}},$$

где  $r$  - коэффициент сопротивления среды.

Следовательно, на колеблющуюся точку в этом случае действует результирующая сила

$$F = -kx - r\dot{x}.$$

Согласно второму закону Ньютона

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x}$$

или

$$\ddot{x} + \frac{r}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0. \quad (3.31)$$

Уравнение (3.31) представляет собой *дифференциальное уравнение затухающих колебаний*. Решив его для случая, когда  $\frac{k}{m} > \left(\frac{r}{2m}\right)^2$ , получим

$$x = A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \alpha), \quad (3.32)$$

где  $A_0 e^{-\beta t}$  - амплитуда затухающих колебаний, убывающая со временем;  $e$  - основание натуральных логарифмов;  $\beta$  - коэффициент затухания колебаний;  $\alpha$  - начальная фаза;  $\omega$  - циклическая частота собственных затухающих колебаний.

Из выражения амплитуды затухающих колебаний видно, что коэффициент затухания  $\beta$  есть величина, обратная тому времени, за которое амплитуда убывает в  $e$  раз. Если  $\beta = 0$ , уравнение (3.32) переходит в уравнение гармонических незатухающих колебаний (3.4). Подставляя уравнение (3.32) в (3.31), находим значения коэффициента затухания  $\beta$  и круговой частоты  $\omega$ :

$$\beta = \frac{r}{2m}; \quad (3.33)$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \quad (3.34)$$

## Период затухающих колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{r}{2m}\right)^2}}. \quad (3.35)$$

Сравнивая (3.13) и (3.35), видим, что период колебаний при наличии сопротивления среды больше, чем при отсутствии затухания. При увеличении сопротивления среды период затухающих колебаний

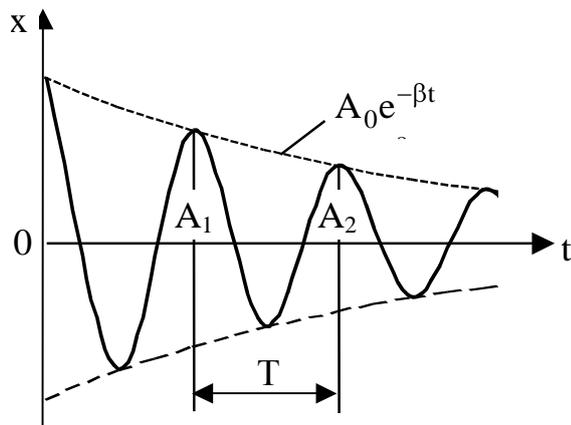


Рис. 3.4

возрастает. График зависимости смещения тела от положения равновесия при затухающих колебаниях от времени представлен на рис.3.4.

Натуральный логарифм отношения двух последовательных значений амплитуды, отстоящих друг от друга на время, равное периоду  $T$ , называется логарифмическим декрементом затухания  $\delta$ , то есть

$$\delta = \ln \frac{A_t}{A_{t+T}}. \quad (3.36)$$

Подставив из формулы (3.32) значения амплитуды  $A_t$  и  $A_{t+T}$ , получим

$$\delta = \ln \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = \beta T. \quad (3.37)$$

Следовательно

$$\delta = \ln \frac{A_1}{A_2} = \ln \frac{A_2}{A_3} = \dots = \beta T = \text{const.}$$

Учитывая физический смысл коэффициента затухания  $\beta$ , приходим к выводу, что  $\delta$  - величина, обратная числу полных колебаний системы, за которое амплитуда убывает в  $e$  раз.

Итак, система, однажды возбужденная начальным толчком, а затем предоставленная самой себе, совершает затухающие колебания с некоторой частотой, зависящей только от массы системы, упругой силы и силы сопротивления движению. Эти колебания называются

свободными. При условии  $\frac{k}{m} \leq \left(\frac{r}{2m}\right)^2$  - колебаний нет, система

совершает апериодическое движение, постепенно приближаясь к положению равновесия.

### 3.3 Вынужденные колебания, резонанс

Если на колеблющуюся материальную точку, кроме упругой силы и силы сопротивления, действует еще периодическая сила  $F = F_0 \sin \Omega t$ , то возникают вынужденные колебания. Сила, действующая на колеблющуюся точку в этом случае

$$F = -kx - r\dot{x} + F_0 \sin \Omega t.$$

Согласно второму закону Ньютона,

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + F_0 \sin \Omega t, \quad (3.38)$$

или

$$\ddot{x} + \frac{r}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{F_0}{m} \sin \Omega t. \quad (3.39)$$

Уравнение (3.39) представляет собой *дифференциальное уравнение вынужденных колебаний*. Решение этого уравнения имеет следующий вид:

$$x = A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \alpha) + A \sin(\Omega t + \alpha),$$

откуда видно, что колебание точки под действием периодически изменяющейся вынуждающей силы складывается из двух движений: из затухающих колебаний, описываемых первым слагаемым, происходящих с частотой  $\omega$ , и незатухающих гармонических колебаний, происходящих с частотой  $\Omega$  вынуждающей силы - второе слагаемое решения.

Затухающие колебания скоро исчезают, проявляясь лишь в течение небольшого промежутка времени  $t_0$  установления вынужденных колебаний. Следовательно, установившиеся вынужденные колебания происходят с частотой вынуждающей силы по закону

$$x = A \sin(\Omega t + \Psi). \quad (3.40)$$

Амплитуда вынужденных колебаний

$$A = \frac{F_0}{m \cdot \sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}}, \quad (3.41)$$

где  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  - частота собственных колебаний;  $\beta = \frac{r}{2m}$  - коэффициент затухания.

Сдвиг фаз  $\psi$  между колебаниями точки и вынуждающей силы определяется соотношением

$$\operatorname{tg}\Psi = -\frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}. \quad (3.42)$$

Зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты приводит к тому, что при некоторой определенной для данной системы частоте амплитуда колебаний достигает максимального значения - это явление называется резонансом. Для определения резонансной частоты нужно найти максимум функции (3.41) или, так как  $F_0/m$  - величина постоянная, найти минимум подкоренного выражения в знаменателе. Продифференцировав подкоренное выражение по частоте  $\Omega$  и приравняв полученное соотношение нулю, найдем значение резонансной частоты

$$\Omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \quad (3.43)$$

Подставляя (3.43) в (3.41), получаем

$$A_{\text{рез}} = \frac{F_0}{2m\beta \cdot \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (3.44)$$

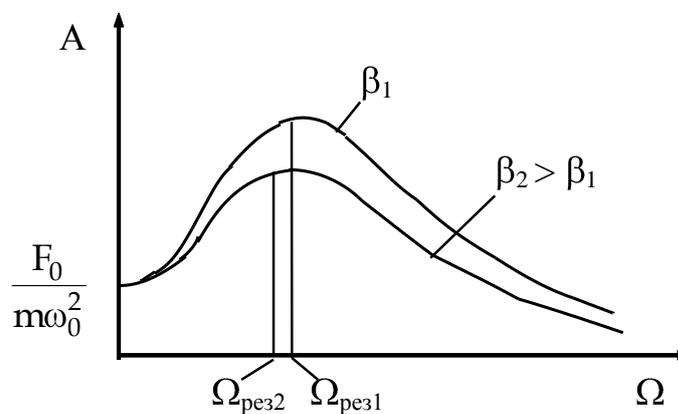


Рис. 3.5

График зависимости амплитуды установившихся вынужденных колебаний от частоты  $\Omega$  вынуждающей силы представлен на рис.3.5 для двух значений коэффициента затухания  $\beta$ . Чем меньше затухание, тем круче поднимается и опускается амплитудная кривая  $A = f(\Omega)$  при резонансе.

### 3.4 Волны

Волнами называются процессы распространения возмущений какой-либо физической величины, характеризующей состояние вещества или поля. Процесс распространения механических возмущений в упругой среде называется упругой волной. Распространение упругих волн состоит в возбуждении колебаний все более и более удаленных от источника волн частиц среды.

В зависимости от направления колебаний частиц по отношению к направлению, в котором распространяется волна, различают продольные и поперечные волны. В продольной волне частицы среды совершают колебания вдоль направления распространения волны. В поперечной волне колебания частиц совершаются в направлениях, перпендикулярных к направлению распространения волны.

Продольные упругие волны в среде возникают в результате упругих деформаций сжатия и расширения. Возникновение их возможно в любой среде - твердой, жидкой и газообразной. Поперечные упругие волны обусловлены упругой деформацией сдвига. Упругие деформации сдвига возможны только в твердых телах, следовательно, поперечные упругие волны могут возникать только в твердых телах. Кроме того, поперечные волны могут распространяться на поверхности жидкости. Скорость распространения упругой волны в среде равна скорости  $v$  распространения в ней небольших возмущений в виде упругой деформации.

Скорость распространения упругих поперечных волн в изотропных твердых средах

$$v_{\text{попер}} = \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \quad (3.45)$$

где  $G$  - модуль сдвига;  $\rho$  - плотность среды.

Скорость распространения упругих продольных волн в длинных тонких стержнях

$$v_{\text{прод}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (3.46)$$

где  $E$  - модуль Юнга.

Если распространяющееся возмущение упругой среды является гармоническими колебаниями с неизменной круговой частотой, то волна называется гармонической.

Рассмотрим одномерную гармоническую продольную волну, распространяющуюся в положительном направлении  $Y$ . Пусть (рис.3.6) плоскость  $P$ , являющаяся источником возникновения плоских волн, совершает колебания по закону  $x = A \sin \omega t$ , где  $A$  - амплитуда

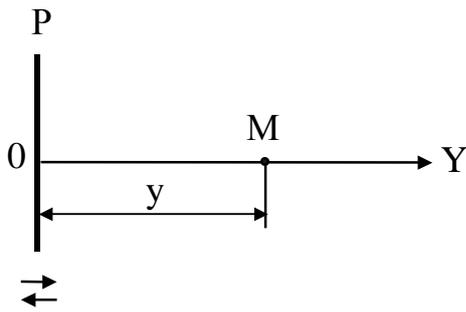


Рис. 3.6

колебаний;  $\omega$  - круговая частота;  $t$  - время, отсчитанное от начала колебаний;  $x$  - смещение плоскости  $P$  относительно положения равновесия  $O$ . Эти колебания той же частоты и амплитуды будут передаваться соседним точкам среды в направлении  $Y$  со скоростью  $v$ .

Найдем, какому закону подчиняется смещение  $x$  любой точки среды  $M$  с координатой  $y$ . Эта точка отстоит от источника колебаний на расстоянии  $y$ , поэтому она будет вовлечена в колебательное движение позднее источника на время  $\tau = \frac{y}{v}$ .

Вследствие запаздывания уравнение колебаний в точке  $M$  будет иметь вид

$$x = A \sin \omega(t - \tau),$$

или

$$x = A \sin \omega \left( t - \frac{y}{v} \right). \quad (3.47)$$

Уравнение (3.45) представляет собой *уравнение плоской гармонической волны*, распространяющейся в направлении  $y$ , здесь  $\frac{\omega \cdot y}{v}$  - сдвиг фазы колебаний в точке  $M$  по сравнению с точкой  $O$ .

Можно показать, что скорость  $v$  в уравнении (3.45) равна скорости распространения в среде любой фиксированной фазы колебаний. Поэтому  $v$  называют фазовой скоростью волны.

Уравнение волны, распространяющейся в противоположном направлении, имеет вид

$$x = A \sin \omega \left( t + \frac{y}{v} \right).$$

Расстояние, на которое распространяется волна за время одного периода колебания частиц, называется длиной волны:

$$\lambda = vT \quad (3.48)$$

Из соотношения (3.48) следует, что

$$v = \lambda \cdot f, \quad (3.49)$$

где  $f$  - частота волны.

Так как  $\omega = 2\pi/T$ , то уравнение бегущей волны можно записать и следующим образом:

$$x = A \sin\left(\omega t - \frac{2\pi y}{\lambda}\right). \quad (3.50)$$

Очень часто волну задают с помощью волнового вектора  $\vec{k}$ , по направлению совпадающего с вектором скорости  $\vec{v}$ : модуль волнового вектора  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ . В этом случае уравнение плоской бегущей в положительном направлении  $y$  волны имеет вид

$$x = A \sin(\omega t - ky). \quad (3.51)$$

Из уравнений (3.50) и (3.51) видно, что точки, отстоящие друг от друга на  $y = \lambda$ , колеблются в фазах, сдвинутых одна относительно другой на  $2\pi$ . Волна, распространяющаяся в направлении  $y$ , может быть и негармонической. В произвольном случае уравнение волны может быть любой функцией аргумента  $(\omega t - ky)$ .

Если фазовая скорость волны в среде зависит от частоты волны, то говорят, что среда обладает дисперсией. Для звуковых волн в газах дисперсия не наблюдается.

### Интерференция волн

В среде одновременно могут распространяться волны от различных источников колебаний, при этом в каждой точке среды происходит сложение волн.

Особый интерес представляет сложение гармонических волн от двух источников, имеющих одинаковое направление колебаний, одинаковую частоту, одинаковую фазу или не изменяющуюся со временем разность фаз.

Такие источники волн, как и созданные ими волны, называются когерентными. В этом случае при сложении волн амплитуда колебаний в каждой точке среды имеет некоторое постоянное значение, причем в одних точках колебания усиливаются, а в других ослабляются. Такое явление, связанное с перераспределением энергии волн по точкам среды в результате их наложения, называется *интерференцией волн*.

Пусть две когерентные волны распространяются от двух близко расположенных источников (рис.3.7)  $O_1$  и  $O_2$ . Уравнения колебаний, создаваемых этими

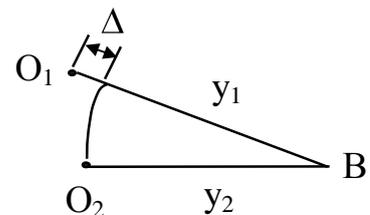


Рис. 3.7

волнами в некоторой точке В, отстоящей на расстоянии  $y_1$  от источника  $O_1$  и на расстоянии  $y_2$  от источника  $O_2$  будут иметь вид

$$x_1 = A_1 \sin\left(\omega t - \frac{2\pi y_1}{\lambda}\right);$$

$$x_2 = A_2 \sin\left(\omega t - \frac{2\pi y_2}{\lambda}\right).$$

В точке В происходит сложение колебаний одинакового направления и одинаковой частоты с разностью фаз

$$\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi \frac{y_1 - y_2}{\lambda}.$$

Результирующая амплитуда

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}. \quad (3.52)$$

В точках, где разность фаз

$$\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi \frac{y_1 - y_2}{\lambda} = 2n\pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (3.53)$$

амплитуда максимальна:  $A = A_1 + A_2$ .

Из соотношения (3.53) следует, что при интерференции волн амплитуда максимальна, если разность хода  $\Delta$  равна *целому числу волн*

$$\Delta = y_1 - y_2 = n\lambda. \quad (3.54)$$

В точках, для которых

$$\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi \frac{y_1 - y_2}{\lambda} = (2n + 1)\pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (3.55)$$

амплитуда минимальна:  $A = |A_1 - A_2|$ .

Из соотношения (3.55) следует, что при интерференции волн амплитуда минимальна, если разность хода  $\Delta$  составляет *нечетное число полуволн*

$$\Delta = y_1 - y_2 = (2n + 1) \frac{\lambda}{2}. \quad (3.56)$$

В частном случае, когда  $A_1 = A_2$  в точках, определяемых условием (3.56), колебания гасят друг друга.

При всех других значениях разности фаз, отличных от целого  $\pi$ , величина амплитуды имеет значение между  $|A_1 - A_2|$  и  $A_1 + A_2$ .

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2

### Измерение ускорения свободного падения с помощью математического и обратного (физического) маятников

Цель работы: изучение колебаний физического и математического маятников и измерение ускорения свободного падения.

#### Методика измерений

Маятники в этой работе - это тела, колеблющиеся под действием сил тяготения. Если маятник можно представить как материальную точку, подвешенную на невесомой и нерастяжимой нити, то говорят о математическом маятнике. На практике математическим маятником можно считать тяжелое тело, подвешенное на легкой нити, длина которой во много раз больше размеров тела. Период колебаний такого маятника (3.23)

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}} \quad (3.57)$$

где  $L$  - длина нити.

Формулу (3.57) можно записать в виде:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g} L. \quad (3.58)$$

Полученная линейная зависимость  $T^2$  от  $L$  может быть проверена экспериментально. Наклон прямой к оси абсцисс позволяет определить  $g$ :

$$g = \frac{4\pi^2 L}{T^2} = \frac{4\pi^2}{T^2/L}. \quad (3.59)$$

Физическим маятником является любое твердое тело, способное совершать колебания вокруг горизонтальной оси, не проходящей через его центр масс. Период колебаний физического маятника (3.22)

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{J}{mga}}, \quad (3.60)$$

где  $J$  - момент инерции маятника относительно оси вращения,  $a$  - расстояние между точкой подвеса и центром масс маятника.

Из сопоставления формул (3.57) и (3.60) получается, что математический маятник с длиной

$$L_{\text{пр}} = \frac{J}{ma} \quad (3.61)$$

будет иметь такой же период колебаний, что и данный физический маятник. Величину (3.61) называют приведенной длиной физического маятника. Таким образом, приведенная длина физического маятника - это длина такого математического маятника, период колебаний которого совпадает с периодом колебаний данного физического маятника. Для всякого тела, рассматриваемого как физический маятник, можно указать две такие точки, именуемые центрами качания, что период малых колебаний при качании вокруг осей, проходящих через эти точки одинаков, а расстояние между ними равно приведенной длине физического маятника. На этом свойстве оборотного маятника основано определение ускорения свободного падения.

Оборотным будет такой маятник, у которого имеются две параллельные друг другу, закрепленные опорные призмы, за которые он может поочередно подвешиваться. Вдоль маятника могут перемещаться и закрепляться на нем тяжелые грузы. Перемещением грузов или опорных призм добиваются того, чтобы при подвешивании маятника за любую из призм период колебаний был одинаков. Тогда расстояние между опорными ребрами призм будет равно  $L_{\text{пр}}$ . Измерив период колебаний маятника и зная  $L_{\text{пр}}$ , можно из формулы

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L_{\text{пр}}}{g}} \quad (3.62)$$

найти ускорение свободного падения  $g$ .

### Экспериментальная установка

Для измерения ускорения свободного падения предназначена экспериментальная установка, общий вид которой приведен на рис.3.8.

Установка состоит из математического и оборотного маятников. Математический маятник представляет собой металлический шарик 5 на бифилярном подвесе 4. Длина подвеса может изменяться в пределах (0,1 – 0,5) м вращением винта 3 и измеряется с помощью линейки 10, укрепленной на стойке 9.

Оборотный маятник состоит из металлического стержня 14, на котором крепятся две способные перемещаться опорные призмы 13, обращенные ножами навстречу друг другу, и два тяжелых чечевицеобразных груза 12, перемещение которых существенно изменяет распределение масс.

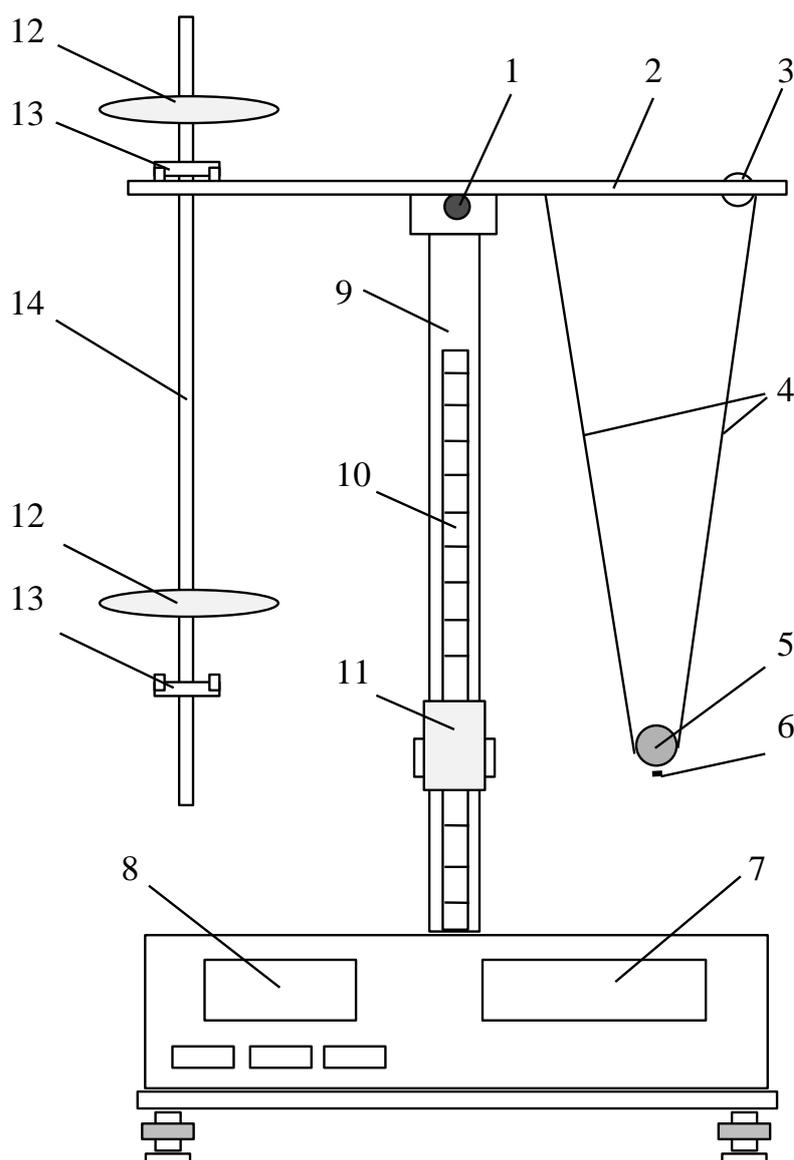


Рис. 3.8

Установка снабжена фотодатчиком 11, фиксирующим прохождение маятником положения равновесия. Сигнал с датчика подается на миллисекундомер 7 и счетчик числа полных колебаний 8.

### Порядок выполнения работы

#### Упражнение 1.

Проверка зависимости периода колебаний от длины математического маятника и определение ускорения свободного падения.

1. Освободив винт 1, повернуть верхнюю планку так, чтобы математический маятник оказался над фотодатчиком перед линейкой 10. Винт 1 закрепить.

2. Вращением винта 3 установить длину маятника  $L = 30$  см по линейке 10 на стойке 9 прибора.

3. Отпустив винт, поднять фотодатчик до уровня центра шарика. Центр шарика расположить на оси фотодатчика. Винт закрепить.

Таблица 3.1

№ п.п	L м	n –	t с	$T = t/n$ с	$T_{\text{ср}}$ с	$T_{\text{ср}}^2$ с <sup>2</sup>
1	0.3					
2						
3						
1	0.35					
2						
3						
1	0.4					
2						
3						
1	0.45					
2						
3						
1	0.5					
2						
3						

4. Установочными винтами 3 и 6 отрегулировать положение шарика так, чтобы он проходил между оптическими элементами фотодатчика.

5. Подключить установку к сети 220 В. Нажать кнопку “Сеть”.

6. Отклонить шарик на небольшой угол ( $5 - 10$ )° и отпустить.

7. Нажать кнопку “Сброс” на панели секундомера и отпустить ее. После  $n = (10 - 15)$  колебаний нажать кнопку “Стоп”. Показания миллисекундомера занести в табл.3.1.

8. Повторив п.п 6, 7 еще два раза, найти среднее значение периода.

9. Повторить п.п 2...8 для длин маятника (35, 40, 45 и 50) см.

10. Выключить установку, нажав кнопку “Сеть”.

11. По этим данным построить график зависимости  $T^2 = f(L)$  (экспериментальные точки и прямая линия).

12. С использованием графика (прямой линии) определить ускорение свободного падения по формуле (3.57).

13. Подсчитать доверительную и относительную погрешность результата измерения.

### Упражнение 2.

Определение ускорения свободного падения с помощью обратного маятника.

1. Освободив винт 1 (рис.3.8), повернуть верхнюю планку 2 таким образом, чтобы нижняя часть оси обратного маятника проходила через прорезь фотодатчика 11.

2. Включить установку, нажав кнопку “Сеть”.

3. При положении грузов А и В согласно рис.3.9а и при произвольном положении призмы 1 (ближе к краю) измерить период малых колебаний  $(5-10)^\circ$ . Для этого необходимо подвесить маятник за призму 1, слегка качнуть его, нажать кнопку “Сброс” и отпустить ее. После 10 – 20 колебаний нажать кнопку “Стоп”. Записать время  $t$  и число колебаний  $n$ . Определить период  $T_1 = t/n$ .

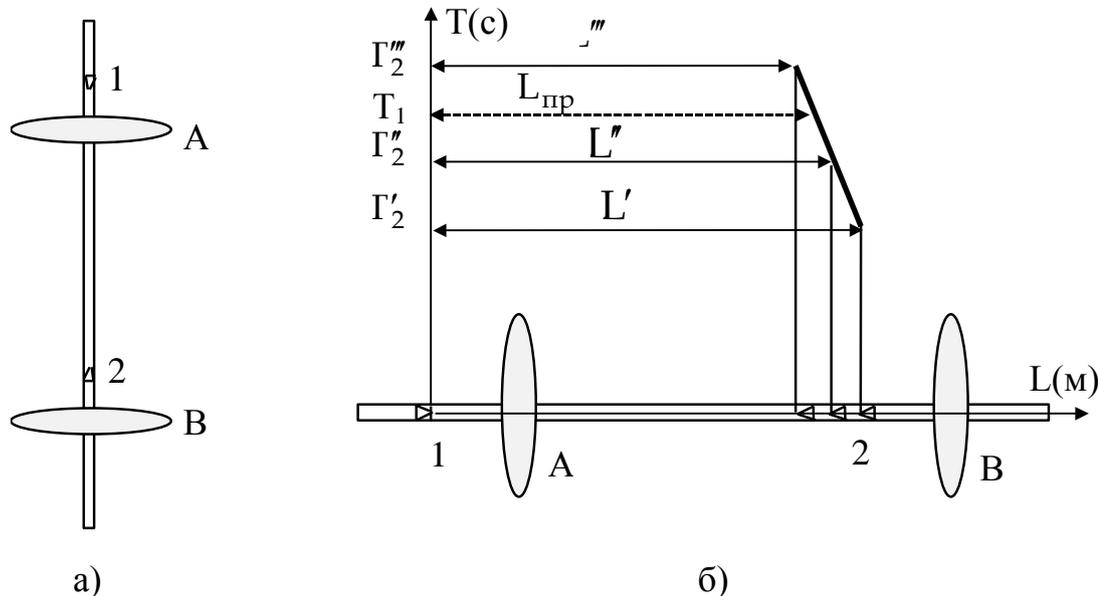


Рис. 3.9

4. Не изменяя положения грузов А и В, перевернуть маятник, подвесив его за призму 2, и аналогичным образом измерить период  $T_2'$  при положении призмы 2 вблизи груза В. Число колебаний при этом может быть не очень велико. Убедиться, что теперь период меньше, чем  $T_1$ .

5. Измерить расстояние между ножами призм  $L'$ .

6. Снять маятник со штатива и незначительно (не более чем на 1 см) переместить призму 2 ближе к центру стержня. Подвесить маятник за призму 2 и измерить период  $T_2''$  и расстояние  $L''$ .

7. Перемещая призму 2, найти два таких положения призмы, когда период колебаний несколько больше и несколько меньше периода  $T_1$ , и измерить эти периоды с достаточно высокой точностью ((10 – 20) колебаний). Измерить соответствующие расстояния между ножами призм.

8. Выключить установку, нажав на кнопку “Сеть”.
9. Построить график зависимости периода колебаний  $T$  от расстояния между ножами опорных призм  $L$  и по графику определить  $L_{пр}$  (рис.3.9б).
10. Из формулы (3.60) найти ускорение свободного падения:

$$g = \frac{4\pi^2 L_{пр}}{T_1^2}.$$

11. Подсчитать доверительную и относительную погрешность результата измерения.

### Контрольные вопросы

1. Что называется физическим маятником?
2. Что такое приведенная длина физического маятника?
3. Как записать дифференциальное уравнение колебаний физического и математического маятника?
4. Почему момент  $\vec{M}$  и угол отклонения  $\vec{\phi}$  имеют противоположные знаки?

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 012

### Изучение колебаний математического маятника и явления параметрического резонанса

Цель работы: исследование закономерностей колебаний математического маятника и наблюдение явления параметрического резонанса.

#### Методика измерений

Математический маятник можно представить как материальную точку, подвешенную на невесомой и нерастяжимой нити. На практике математическим маятником можно считать тяжелое тело, подвешенное на легкой нити, длина которой во много раз больше размеров тела. Если силами сопротивления воздуха пренебречь, то колебания можно считать незатухающими. Тогда период колебаний такого маятника (3.23)

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}} \quad (3.63)$$

где  $L$  - длина нити.

Формулу (3.63) можно записать в виде:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g} L. \quad (3.64)$$

Таким образом, период колебаний математического маятника зависит от длины нити. В этом можно убедиться, замерив периоды колебаний математического маятника, колеблющегося на нитях разной длины. График  $T^2 = f(L)$  должен быть прямой линией (рис.3.10).

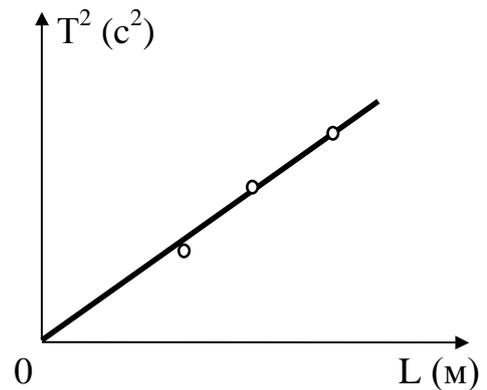


Рис. 3.10

Мы рассматривали колебания как незатухающие. В действительности имеется

сопротивление среды, в результате чего энергия маятника тратится на работу сил трения, переходя в тепловую энергию. Полная энергия маятника уменьшается, колебания постепенно прекращаются.

Одной из характеристик быстроты затухания колебаний является логарифмический декремент затухания (3.36), (3.37)

$$\delta = \ln \frac{A_t}{A_{t+T}} = \beta T,$$

где  $\beta$  – коэффициент затухания среды.

Чтобы определить логарифмический декремент затухания, можно подсчитать количество колебаний  $N$ , за которое амплитуда колебаний уменьшается в  $k$  раз:

$$\ln k = \ln \frac{A_t}{A_{t+NT}}. \quad (3.65)$$

Подставляя в (3.65) выражение для амплитуды затухающих колебаний согласно (3.32), имеем

$$\ln k = \ln \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+NT)}} = \ln \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta t} \cdot e^{-\beta NT}} = \beta NT = \delta N.$$

Отсюда

$$\delta = \frac{\ln k}{N}. \quad (3.66)$$

Измерив количество колебаний, за которое амплитуда уменьшается в два раза ( $k = 2$ ), получим

$$\delta = \frac{0,693}{N}. \quad (3.67)$$

Чтобы колебания не затухали, к колеблющейся системе надо периодически подводить энергию. Это может делать приложенная к системе внешняя вынуждающая сила, непосредственно смещающая систему из положения равновесия.

Но возможны и другие варианты, например параметрическое возбуждение, когда внешняя периодическая сила действует не непосредственно на движение системы, а только изменяет с определенной частотой один из параметров системы.

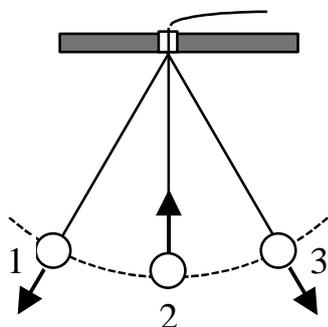


Рис. 3.11

Так если при колебаниях математического маятника (рис.3.11) с частотой в два раза большей, чем частота колебаний маятника, укорачивать подвес при прохождении положения равновесия (см. рис.3.11 положение 2) на некоторую величину и удлинять нить подвеса на ту же величину при наибольшем отклонении (см. рис.3.11 положения 1 и 3), то амплитуда колебаний маятника увеличивается. Это явление носит название *параметрического резонанса*.

При подъеме маятника совершается положительная работа (система накапливает энергию), а при опускании маятника совершается отрицательная работа (энергия системы уменьшается). Если разность энергий больше потерь энергии на трение, то маятник накапливает энергию и амплитуда его колебаний увеличивается.

### Экспериментальная установка

Для изучения колебаний математического маятника и явления параметрического резонанса ускорения свободного падения предназначена экспериментальная установка, общий вид которой приведен на рис.3.12.

Она включает в себя математический маятник (стальной шарик 11, висящий на нити 10). Шкала на подвижном кронштейне 9 позволяет отсчитывать углы отклонения маятника.

В пульте управления 7 смонтирован электродвигатель, позволяющий менять длину нити 10. На лицевой панели пульта имеется тумблер “Сеть” 5, служащий для включения электродвигателя; лампочка 6, сигнализирующая о включении электродвигателя; и ручка 8 “Частота изменения параметра”. Вращение ручки 8 по часовой стрелке увеличивает частоту изменения длины нити.

На нижнем кронштейне смонтирован фотоэлектрический датчик 12, сигнал от которого поступает на миллисекундомер 4, который служит для подсчета количества и времени колебаний маятника. На миллисекундомере имеется ряд индикаторных ламп.

Первые две показывают число полных колебаний. Остальные пять показывают число секунд, причем первые две из них показывают целое число секунд, остальные три – доли секунд. Имеются также три клавиши:

“Сеть” 1, “Стоп” 2 и “Сброс” 3, служащие, соответственно, для включения прибора, прекращения счета и повторного включения в работу.

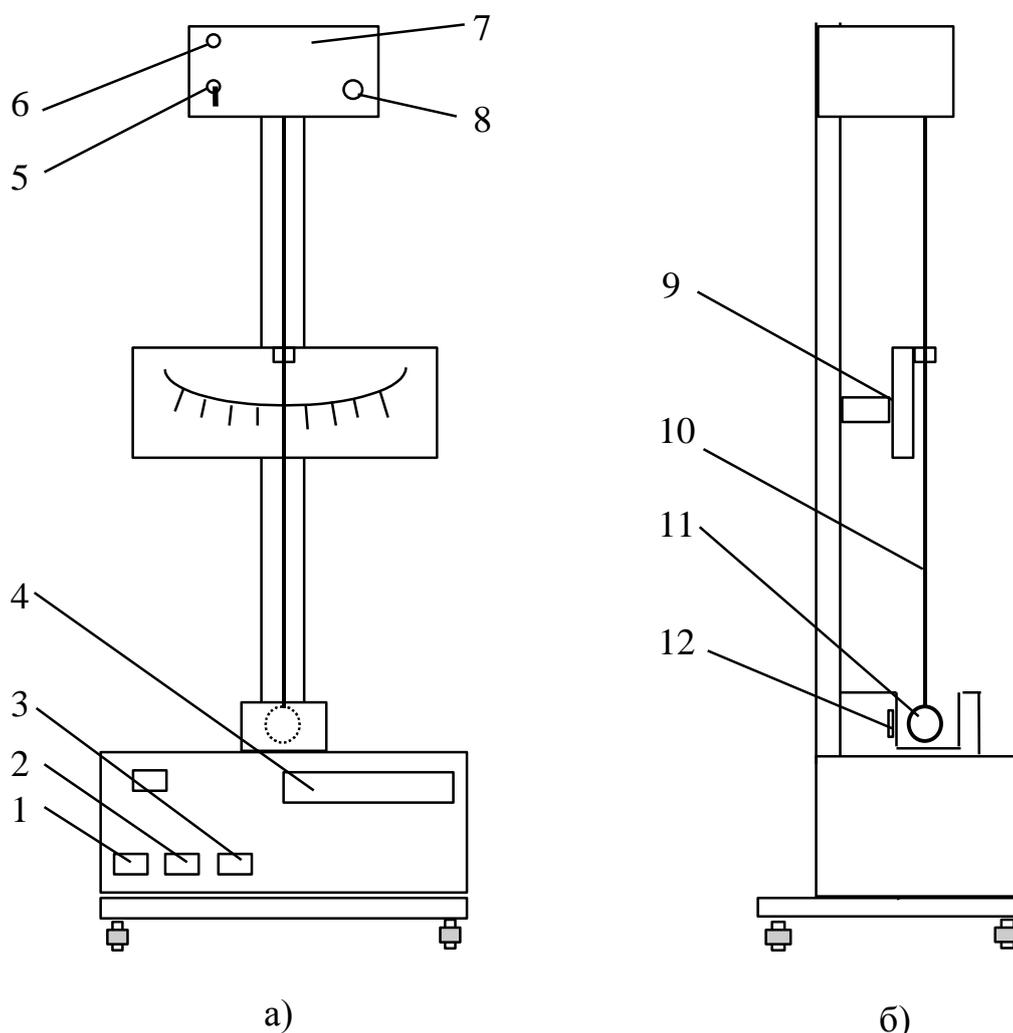


Рис. 3.12

Первые две показывают число полных колебаний. Остальные пять показывают число секунд, причем первые две из них показывают целое число секунд, остальные три – доли секунд. Имеются также три клавиши: “Сеть” 1, “Стоп” 2 и “Сброс” 3, служащие, соответственно, для включения прибора, прекращения счета и повторного включения в работу.

### Порядок выполнения работы

#### Упражнение 1.

Изучение зависимости периода колебаний от длины математического маятника.

1. Подключить установку к сети.
2. Нажать клавишу 1 “Сеть”, при этом должны загореться индикаторные лампы миллисекундомера и лампочка, освещающая фотозащитный элемент.

3. Проверить работу миллисекундомера. Для этого отклонить маятник на угол  $(5 - 7)^\circ$  и отпустить. Нажав на клавишу 3 “Сброс”, посмотреть, будет ли прибор считать количество колебаний и их время. Убедившись в работе прибора, остановить его, нажав клавишу 2 “Стоп”.

4. Опустить кронштейн 9 со шкалой в нижнее положение, измерить длину маятника  $L$  и записать полученное значение в табл.3.2.

Таблица 3.2

№ п.п	L м	n –	t с	$T = t/n$ с	$T_{\text{ср}}$ с	$T_{\text{ср}}^2$ с <sup>2</sup>
1						
2						
3						
1						
2						
3						
1						
2						
3						

5. Нажав на клавишу “Сброс” миллисекундомера, измерить время ( $t$ ) для  $n = (5 - 10)$  полных колебаний. Остановить миллисекундомер нажатием клавиши “Стоп”.

6. Подсчитать период колебаний  $T = t/n$  и занести полученные значения в табл.3.2.

7. Провести не менее трех измерений и найти среднее значение периода  $\bar{T}$ .

8. Установить кронштейн со шкалой в среднее и верхнее положения и повторить измерения по п.п. 4 – 7. Результаты занести в табл.3.2

9. Построить график зависимости  $T^2 = f(L)$ .

### Упражнение 2.

Определение логарифмического декремента затухания.

1. Поставить кронштейн со шкалой в среднее положение.
2. Отвести маятник на угол  $\varphi_0 = (7 - 8)^\circ$  и отпустить.
3. Нажать клавишу “Сброс” миллисекундомера и измерить число колебаний  $N$ , во время которых максимальный угол отклонения маятника уменьшится в два раза  $\varphi = \varphi_0/2$ .

4. По формуле (3.67) рассчитать логарифмический коэффициент затухания  $\delta$ .

### Упражнение 3.

#### Исследование параметрического резонанса.

1. Ручку 8 “Частота изменения параметра” повернуть по часовой стрелке до упора.

2. Включить тумблер 5 “Сеть” на пульте управления 7.

3. Отвести шарик на угол  $(5 - 7)^\circ$  и отпустить.

4. Медленно вращая ручку “Частота изменения параметра” добиться резонанса системы, при котором амплитуда колебаний маятника будет резко возрастать.

5. Выключить тумблер 5 “Сеть” (не изменяя положение ручки “Частота изменения параметра”).

6. Замерить частоту колебаний маятника. Для этого отвести шарик на угол  $(5 - 7)^\circ$ , отпустить и, включив миллисекундомер, измерить время  $t$  для  $n = (5 - 10)$  полных колебаний. Результаты измерений занести в табл.3.3.

Таблица 3.3

№ п.п	n –	t с	f Гц	$\bar{f}$ Гц	$n_1$ –	$t_1$ с	$f_1$ Гц	$\bar{f}_1$ Гц	$\bar{f}_1/\bar{f}$ –
1									
2									
3									

7. Определить частоту колебаний  $f = n/t$ .

8. Повторить измерения по п.п. 6, 7 не менее трех раз.

9. Определить среднее значение частоты колебаний  $\bar{f}$ .

10. Определить частоту изменения параметра. Для этого, не отклоняя шарик от положения равновесия, включить тумблер 5 “Сеть”.

11. Измерить время  $t_1$  для  $n_1 = (10 - 15)$  подъемов и опускания нити (если фотодатчик установки не срабатывает, то использовать механический секундомер, считая число подъемов–опусканий нити).

12. Подсчитать частоту колебаний  $f_1 = n_1/t_1$ .

13. Повторить измерения по п.п. 11, 12 не менее трех раз.

14. Определить среднее значение частоты изменения параметра  $\bar{f}_1$ .

15. Найти отношение средней частоты изменения параметра к средней частоте колебаний  $\bar{f}_1/\bar{f}$ .

16. Отключить установку от сети.

#### **Контрольные вопросы**

1. В чем отличие параметрических колебаний от свободных и вынужденных?

2. Как изменяется энергия маятника при параметрических колебаниях и при затухающих колебаниях с вязким трением?

3. Каково должно быть соотношение между частотой изменения параметра и собственной частотой колебаний системы для того, чтобы наблюдался параметрический резонанс?

4. Какие колебания будет совершать маятник, если подводимая энергия будет равна потерям энергии в системе?

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 8

### Определение момента инерции махового колеса методом колебаний

Цель работы: определение момента инерции махового колеса по параметрам колебаний колеса с дополнительным грузом.

#### Методика измерений и экспериментальная установка

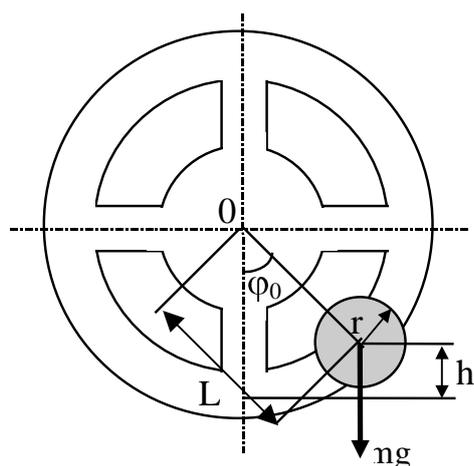


Рис. 3.13

Массивное металлическое колесо закреплено на подставке таким образом, что его ось вращения проходит через центр тяжести колеса. К ободу колеса прикреплен добавочный груз массой  $m$ . Если колесо вывести из положения равновесия, как показано на рис.3.13, то система начнет совершать колебания, которые при достаточно малых углах отклонения можно считать гармоническими.

При отклонении системы от положения равновесия ее потенциальная энергия равна потенциальной энергии груза массой  $m$ , поднятого на высоту  $h$ :

$$U = mgh. \quad (3.68)$$

Пренебрегая потерей энергии за счет трения, полагаем, что потенциальная энергия полностью переходит в кинетическую энергию системы (2.21) при прохождении ею положения равновесия:

$$K = \frac{J\omega_m^2}{2},$$

где  $J$  - момент инерции системы относительно оси вращения  $O$ ;  $\omega_m$  - наибольшее значение угловой скорости, которую система приобретает в момент прохождения положения равновесия.

Итак, на основании закона сохранения энергии

$$mgh = \frac{J\omega_m^2}{2}. \quad (3.69)$$

Значения  $h$  и  $\omega_m$  непосредственно измерить трудно, поэтому выразим их через величины, которые могут быть найдены экспериментально.

Из рис.3.13 видно, что

$$h = L(1 - \cos\varphi_0) = 2L \sin^2 \frac{\varphi_0}{2}.$$

Здесь  $L$  – расстояние между осями груза и колеса.

Для малых углов (меньше десяти градусов) можно принять  $\sin\varphi \approx \varphi$ .

Поэтому  $\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \approx \frac{\varphi_0^2}{4}$  и тогда  $h \approx \frac{L\varphi_0^2}{2}$ .

При гармонических колебаниях угловая скорость определяется формулой:

$$\omega = \omega_0 \varphi_0 \cos(\omega_0 t + \alpha),$$

или при  $\alpha = 0$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \varphi_0 \cos \frac{2\pi}{T} t.$$

Максимальное значение скорости соответствует моменту, когда  $\cos \frac{2\pi}{T} t = 1$ , следовательно

$$\omega_m = \frac{2\pi}{T} \varphi_0.$$

Подставляя  $h = \frac{L\varphi_0^2}{2}$  и  $\omega_m = \frac{2\pi}{T} \varphi_0$  в формулу (3.69), находим

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{J}{mgL}}. \quad (3.70)$$

Применяя теорему Штейнера (2.20) и учитывая, что момент инерции  $J$  системы равен сумме момента инерции колеса  $J_0$  и момента инерции добавочного груза (имеющего форму цилиндра), найдем:

$$J = J_0 + \frac{mr^2}{2} + mL^2, \quad (3.71)$$

где  $m$  - масса груза,  $r$  - радиус цилиндра (груза).

Уравнение (3.71) можно записать в виде

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{mgL} \left( J_0 + \frac{mr^2}{2} + mL^2 \right). \quad (3.72)$$

Отсюда для момента инерции колеса получаем расчетную формулу

$$J_0 = \frac{mgLT^2}{4\pi^2} - m \left( \frac{r^2}{2} + L^2 \right). \quad (3.73)$$

Величины  $T$ ,  $m$ ,  $r$  и  $L$  могут быть найдены непосредственными измерениями.

### Порядок выполнения работы

1. Отклонив колесо с добавочным грузом от положения равновесия на небольшой угол (в пределах  $10^\circ$ ), определить с помощью секундомера время  $t$  для  $n = (10 - 15)$  полных колебаний и вычислить период колебаний  $T = t/n$ . Измерения повторить не менее трех раз.

2. Измерить штангенциркулем расстояние  $L$  между осями махового колеса и цилиндра, а также диаметр цилиндра ( $2r$ ). Измерения повторить несколько раз. Все измерения записать в табл.3.4.

Таблица 3.4

№ п.п	n	t с	T с	L м	r м	$\bar{J}_0$ кг·м <sup>2</sup>
1						—
2						—
3						—
Среднее значение	—	—				

3. Рассчитать средние арифметические значения измеряемых величин и определить по формуле (3.73) среднее значение момента инерции  $\bar{J}_0$ . Масса добавочного груза указана на установке.

4. Вычислить доверительную и относительную погрешности результата.

### Контрольные вопросы

1. От чего зависит момент инерции тела?
2. Напишите исходные уравнения для вывода расчетной формулы в данной работе и объясните физический смысл всех входящих в эти уравнения величин.
3. Каково назначение дополнительного груза в данной работе? Как определяется его момент инерции?
4. Почему при выполнении работы необходимо, чтобы угол отклонения колеса от положения равновесия был не более  $10^\circ$ ?

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 10

### Определение момента инерции твердых тел с помощью крутильных колебаний

Цель работы: определение момента инерции твердых тел и ознакомление с методом крутильных колебаний.

#### Методика измерений

Рассмотрим колебания системы, состоящей из рамки, прямоугольного параллелепипеда (куба) и проволок; параллелепипед (куб) укреплен в рамке относительно одной из осей, например, диагонали  $AC'$ , оси  $OX$ , оси  $OZ$  и т.д. (рис.3.14, 3.15).

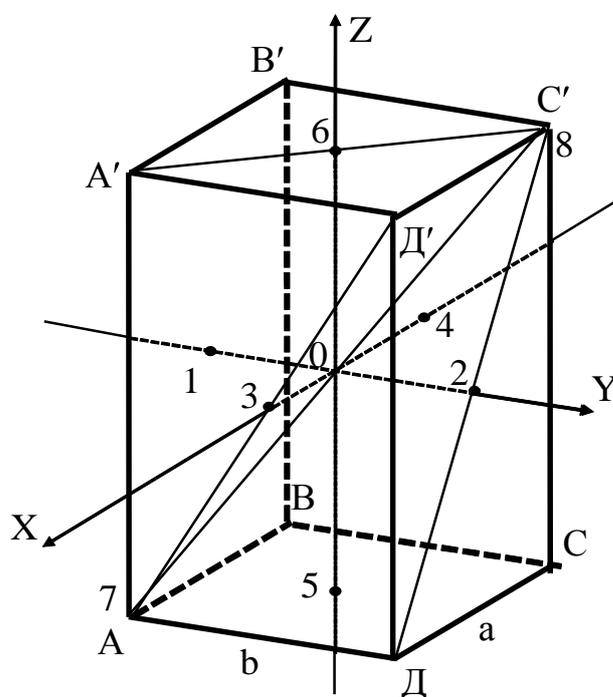


Рис. 3.14

Запишем основное уравнение динамики вращательного движения (2.19)

$$M = J\varepsilon = J \frac{d^2\varphi}{dt^2}, \quad (3.74)$$

где  $M$  - момент действующих на систему сил.

Используя соотношение (3.24)

$$M = -c\varphi \quad (3.75)$$

для момента упругих сил, найдем, что уравнение движения системы имеет вид

$$(J_0 + J_A) \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -(c_1 + c_2)\varphi. \quad (3.76)$$

Здесь  $J_0$  - момент инерции рамки относительно ее оси;  $J_A$  - момент инерции параллелепипеда, закрепленного по  $AC'$ , относительно оси рамки;  $\varphi$  - угол поворота рамки;  $c_1$  и  $c_2$  - коэффициенты возвращающего момента первой и второй проволок:

$$c_{1,2} = \frac{\pi G r^4}{2L_{1,2}}, \quad (3.77)$$

$L$  - длина проволоки;  $r$  - радиус проволоки;  $G$  - модуль сдвига, характеризующий упругие свойства материала проволоки. Для стальной проволоки  $G = 8 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>.

Момент инерции системы равен сумме моментов инерции тел, составляющих ее:

$$J = J_0 + J_A. \quad (3.78)$$

Из уравнения (3.76) можно получить значение периода крутильных колебаний относительно оси  $AC'$ :

$$T_A = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{J_0 + J_A}{c_1 + c_2}}. \quad (3.79)$$

Периоды колебаний системы относительно осей  $OX$  (точки крепления 3 – 4),  $OY$  (точки 1 – 2) и  $OZ$  (точки 5 – 6) согласно рис.3.14:

$$T_x = 2\pi \sqrt{\frac{J_0 + J_{x_0}}{c_1 + c_2}}; \quad T_y = 2\pi \sqrt{\frac{J_0 + J_{y_0}}{c_1 + c_2}}; \quad T_z = 2\pi \sqrt{\frac{J_0 + J_{z_0}}{c_1 + c_2}}; \quad (3.80)$$

В общем случае из уравнения (3.79) можно получить момент инерции  $J_A$  (ось крепления точки  $AC'$ ):

$$J_0 + J_A = \frac{(c_1 + c_2)T_A^2}{4\pi^2},$$

откуда

$$J_A = \frac{(c_1 + c_2)T_A^2}{4\pi^2} - J_0 = \frac{c_1 + c_2}{4\pi^2} (T_A^2 - T_0^2). \quad (3.81)$$

где  $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J_0}{c_1 + c_2}}$  - период колебаний пустой рамки.

Аналогично находим  $J_{x_0} = J_x$ ,  $J_{y_0} = J_y$ ,  $J_{z_0} = J_z$ :

$$\begin{aligned} J_{x_0} &= \frac{c_1 + c_2}{4\pi^2} (T_x^2 - T_0^2), \\ J_{y_0} &= \frac{c_1 + c_2}{4\pi^2} (T_y^2 - T_0^2), \\ J_{z_0} &= \frac{c_1 + c_2}{4\pi^2} (T_z^2 - T_0^2). \end{aligned} \quad (3.82)$$

### Экспериментальная установка

Для определения моментов инерции твердых тел предназначена экспериментальная установка, общий вид которой приведен на рис.3.15.

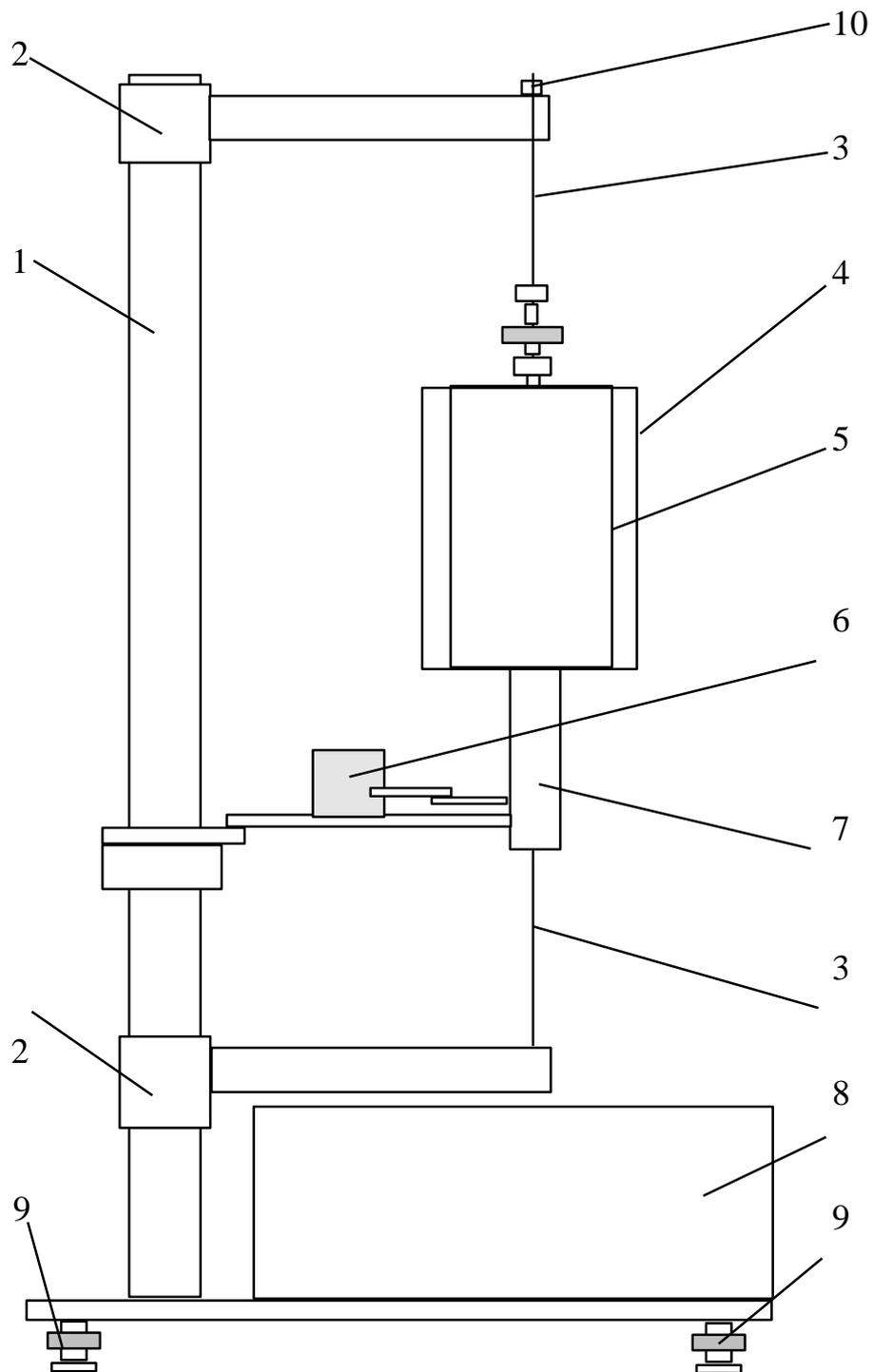


Рис. 3.15

Установка состоит из вертикальной стойки 1 с верхним и нижним кронштейнами 2. Между верхним и нижним кронштейнами на



7. По формуле (3.77) подсчитать величины  $c_1$  и  $c_2$ .

8. Для средних значений  $\bar{T}_0$  определить момент инерции рамки по формуле:

$$J_0 = (c_1 + c_2) \frac{\bar{T}_0^2}{4\pi^2}.$$

### Упражнение 2.

Определение моментов инерции образцов.

1. Отключить прибор от сети кнопкой “Сеть”. Установить один из образцов - параллелепипед или куб (по указанию преподавателя). Чтобы установить образец, нужно отвинтить гайки цанговых зажимов на подвижной планке рамки. Поднять планку и осторожно вставить образец так, чтобы острия рамки входили в углубления на образце по какой-либо из осей  $AC'$ ,  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  (рис.3.15) и закрепить его.

2. Выполнить п.п 2...4 упражнения 1 для всех указанных осей. Результаты занести в табл.3.6, 3.7, 3.8, 3.9.

Таблица 3.6

№ п.п	$t_A$ с	$n_A$ —	$T_A$ с	$\bar{T}_A$ с	$J_A$ кг·м <sup>2</sup>
1					
2					
3					

Таблица 3.7

№ п.п	$t_x$ с	$n_x$ —	$T_x$ с	$\bar{T}_x$ с	$J_x$ кг·м <sup>2</sup>
1					
2					
3					

Таблица 3.8

№ п.п	$t_y$ с	$n_y$ —	$T_y$ с	$\bar{T}_y$ с	$J_y$ кг·м <sup>2</sup>
1					
2					
3					

Таблица 3.9

№ п.п	$t_z$ с	$n_z$ —	$T_z$ с	$\bar{T}_z$ с	$J_z$ кг·м <sup>2</sup>
1					
2					
3					

3. Определить период крутильных колебаний по формуле  $T = t/n$ .

4. Для средних значений периодов колебаний рассчитать моменты инерции  $J_A$ ,  $J_x$ ,  $J_y$  и  $J_z$  по формулам (3.81) и (3.82).

5. Определить доверительную и относительную погрешность измерений для одной из величин:  $J_x$ ,  $J_y$ ,  $J_z$  (по указанию преподавателя).

### Контрольные вопросы

1. В чем состоит метод крутильных колебаний?
2. Что такое момент инерции?
3. В чем заключается метод крутильных колебаний для расчета моментов инерции тела?
4. Объясните различие в величинах полученных моментов инерции  $J_A$ ,  $J_x$ ,  $J_y$  и  $J_z$ .

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 11

### Определение момента инерции тела при помощи трифилярного подвеса

Цель работы: определение момента инерции тела по параметрам крутильных колебаний тела на трифилярном подвесе.

#### Методика измерений и экспериментальная установка

Моменты инерции различных тел относительно оси, проходящей через их центр тяжести, могут быть определены методом крутильных колебаний на трифилярном подвесе.

Трифиллярный подвес состоит из диска массой  $m_d$  и радиусом  $R$ , подвешенного к неподвижному диску меньшего радиуса  $r$  на трех симметрично расположенных нитях длиной  $L$  (рис.3.16а). Подвес может совершать крутильные колебания относительно оси, проходящей через центр тяжести диска перпендикулярно к его плоскости.

При повороте нижнего диска относительно верхнего на небольшой угол  $\varphi$  ( $\approx 10^\circ$ ) все нити принимают наклонное положение, и центр тяжести диска при этом поднимается на высоту  $h = h_1 - h_2$  (рис.3.16б).

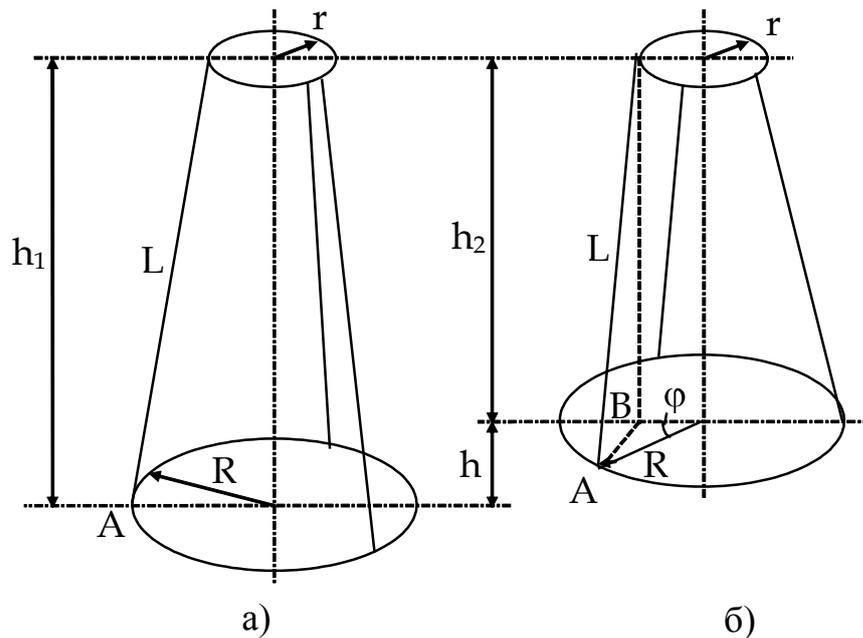


Рис. 3.16

Если диск отпустить, он начинает совершать крутильные гармонические колебания, период которых зависит от момента инерции диска. При этом потенциальная энергия диска будет переходить в его кинетическую энергию и обратно.

В момент прохождения положения равновесия вся потенциальная энергия перейдет в кинетическую энергию вращения диска. Пренебрегая трением, закон сохранения механической энергии можно записать следующим образом:

$$m_d g h_m = \frac{J_d \omega_m^2}{2}, \quad (3.83)$$

где  $J_d$  - момент инерции диска;  $g$  - ускорение свободного падения;  $h_m$  - максимальная высота поднятия центра тяжести диска при отклонении от положения равновесия;  $\omega_m$  - максимальная угловая скорость в момент прохождения положения равновесия.

Угол отклонения от положения равновесия  $\varphi$  при гармонических крутильных колебаниях изменяется по закону

$$\varphi = \varphi_0 \sin \frac{2\pi}{T} t,$$

где  $T$  - период колебаний;  $\varphi_0$  - амплитуда колебаний.

Угловая скорость диска

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \varphi_0 \frac{2\pi}{T} \cos \frac{2\pi}{T} t,$$

где  $\omega_m = \varphi_0 \frac{2\pi}{T}$  - амплитуда угловой скорости.

Высоту  $h_m$  можно рассчитать следующим образом:

$$h_m = h_1 - h_2 = \frac{h_1^2 - h_2^2}{h_1 + h_2}.$$

Если  $R \ll L$ , можно принять  $h_1 + h_2 \approx 2L$ . В этом случае

$$h_m = \frac{h_1^2 - h_2^2}{2L}.$$

Из рис.3.16 видно, что

$$h_1^2 = L^2 - (R - r)^2,$$

$$h_2^2 = L^2 - (AB)^2 = L^2 - (R^2 + r^2 - 2Rr \cos \varphi_0).$$

Следовательно:

$$h_m = \frac{Rr(1 - \cos \varphi_0)}{L} = \frac{2Rr \sin^2 \frac{\varphi_0}{2}}{L}.$$

Так как угол  $\varphi_0$  мал, то значение синуса можно заменить значением аргумента, то есть

$$\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \approx \frac{\varphi_0^2}{4},$$

и тогда

$$h_m = \frac{Rr\varphi_0^2}{2L}. \quad (3.84)$$

Подставляя  $\omega_m$  и  $h_m$  в (3.83), получаем

$$J_d = \frac{m_d g R r}{4\pi^2 L} T^2. \quad (3.85)$$

Из уравнения (3.85) следует

$$J_d = c m_d T^2, \quad (3.86)$$

где  $c$  - коэффициент пропорциональности, являющийся константой прибора. Он зависит от параметров трифилярного подвеса  $R$ ,  $r$  и  $L$ :

$$c = \frac{gRr}{4\pi^2 L}.$$

Если изменять массу трифилярного подвеса, нагружая диск, то его момент инерции будет меняться, при этом согласно формуле (3.86) зависимость  $J = f(mT^2)$  будет линейной. Здесь  $J$  - момент инерции нагруженного подвеса;  $m$  - суммарная масса системы;  $T$  - период

гармонических крутильных колебаний при соответствующих значениях  $J$  и  $m$ .

Для определения момента инерции исследуемого тела относительно оси, проходящей через центр тяжести, нужно построить с помощью эталонных грузов градуировочную кривую  $J = f(mT^2)$ .

Для этого на нижний диск подвеса нанесены концентрические окружности радиусом  $R_1, R_2, \dots, R_n$ . На каждой окружности сделано несколько отверстий на одинаковом расстоянии друг от друга. Располагая эталонные грузы симметрично на том или ином расстоянии  $R_i$  от оси вращения, мы получаем значение момента инерции:

$$J = J_{\text{д}} + k \left( \frac{m_0 r_0^2}{2} + m_0 R_i^2 \right), \quad (3.87)$$

где  $J_{\text{д}}$  - момент инерции ненагруженного нижнего диска;  $k$  - число цилиндрических грузов;  $m_0$  и  $r_0$  - масса и радиус груза;  $\left( \frac{m_0 r_0^2}{2} + m_0 R_i^2 \right)$  – момент инерции каждого из грузов относительно оси вращения системы (по теореме Штейнера).

Вращательный импульс, необходимый для начала крутильных колебаний, сообщается трифилярному подвесу поворотом верхнего диска при помощи шнура, приводящего в движения рычажок, связанный с осью верхнего диска. Для удобства отсчетов на нижнем диске есть метка, против которой устанавливают указатель - стержень на подставке.

### Порядок выполнения работы

1. С помощью штангенциркуля измерить радиусы  $r_0$  эталонных цилиндров. В работе масса  $m_{\text{д}}$  нижнего диска и его момент инерции  $J_{\text{д}}$  даются как постоянные прибора. Эти величины записать в табл.3.10.

Таблица 3.10

№ п.п	$r_0$ м	$m_0$ кг	$m_{\text{д}}$ кг	$J_{\text{д}}$ кг·м <sup>2</sup>

2. Помещая грузы последовательно на первую, вторую и т.д. окружности, определить в каждом случае время  $t$  для  $n = (10 - 15)$  полных колебаний и рассчитать период колебаний  $T = t/n$ , где  $n$  - число колебаний.

3. Измерения по п.2 повторить не менее трех раз. Результаты измерений занести в табл.3.11.

Таблица 3.11

№ п.п	$R_i$ м	n –	t с	T с	$\bar{T}^2$ с <sup>2</sup>	m кг	$m\bar{T}^2$ кг·с <sup>2</sup>	J кг·м <sup>2</sup>
1								
2								
3								
1								
2								
3								
1								
2								
3								
1								
2								
3								

4. Определить среднее значение периода колебаний для каждой серии измерений  $\bar{T}$ .

5. Рассчитать суммарную массу системы  $m = m_d + km_0$ , где  $m_d$  – масса нижнего диска, k – число грузов.

6. Определить момент инерции системы J по формуле (3.87).

7. Построить график зависимости J от ( $m\bar{T}^2$ ). Экспериментальные точки должны располагаться около прямой.

8. Исследуемое тело массой  $m_T$  поместить на диск так, чтобы ось вращения проходила через центр тяжести тела, и определить время (10 - 15) полных колебаний подвеса с исследуемым телом.

9. Измерения по п.8 повторить не менее трех раз. Рассчитать период колебаний  $T = t/n$ , определить среднее значение  $\bar{T}$  и величину ( $m\bar{T}^2$ ), где  $m = m_d + m_T$ . Результаты измерений занести в табл.3.12.

Таблица 3.12

№ п.п	n –	t с	T с	$\bar{T}^2$ с <sup>2</sup>	m кг	$m\bar{T}^2$ кг·с <sup>2</sup>
1						
2						
3						

11. По построенному ранее градуировочному графику для этого значения ( $m\bar{T}^2$ ) найти момент инерции системы  $J = J_{\text{д}} + J_{\text{т}}$ , откуда  $J_{\text{т}} = J - J_{\text{д}}$ .

12. Рассчитать доверительную и относительную погрешность измерений.

### Контрольные вопросы

1. Какова цель данной работы? Опишите метод исследования.
2. Примените закон сохранения энергии к трифилярному подвесу и получите формулу для периода его гармонических крутильных колебаний.
3. Найдите зависимость между моментом инерции трифилярного подвеса и произведением его массы на квадрат периода его крутильных гармонических колебаний. Изобразите ее на графике.
4. Каково назначение цилиндрических грузов?

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 13

### Исследование свободных колебаний пружинного маятника

Цель работы: изучение зависимости периода колебаний пружинного маятника от массы тела и жесткости проволоки.

#### Методика измерений и экспериментальная установка

В данной работе исследуются гармонические колебания пружинного маятника (рис.3.17), состоящего из спиральной легкой пружины, к которой подвешивается груз массой  $m$ . Период таких колебаний выражается формулой

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}},$$

откуда

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{m}{k}. \quad (3.88)$$

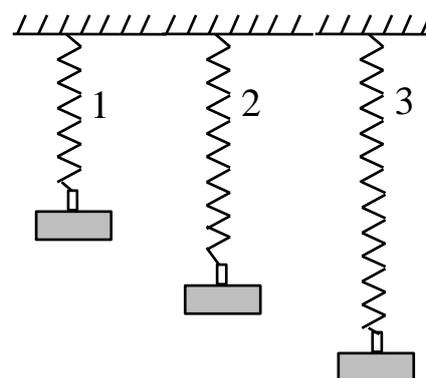


Рис. 3.17

Целью работы является экспериментальная проверка соотношения (3.88).

Измерив период колебаний для различных значений массы  $m$  при  $k = \text{const}$ , можно получить график зависимости квадрата периода колебаний  $T^2$  от массы  $m$  колеблющегося тела. График функции  $T^2 = f(m)$  при  $k = \text{const}$  в соответствии с (3.88) при гармонических колебаниях должен быть прямой линией, проходящей через начало координат.

Измерив период колебаний для различных значений  $k$  при одной и той же массе  $m = \text{const}$ , можно получить график зависимости квадрата периода колебаний  $T^2$  от  $1/k$ . График функции  $T^2 = f(1/k)$  тоже должен быть прямой линией, проходящей через начало координат.

Экспериментальная установка состоит из подставки, к которой прикреплены пружины 1, 2, 3 разной длины, обладающие различными упругими свойствами. К пружинам прикреплены подвесы, на которые помещают цилиндрические грузы массой  $m_{\text{гр}} = 0,05$  кг каждый (масса подвеса также 0,05 кг). Число грузов можно изменять, следовательно, можно изменять силу, растягивающую пружину, и колеблющуюся массу.

## Порядок выполнения работы

### Упражнение 1.

Проверка зависимости  $T^2 = f(m)$  при  $k = \text{const}$ .

1. Найти опытным путем периоды колебаний грузов различной массы  $m_1, m_2, m_3$  и т.д. на одной и той же пружине. Для этого на подвес выбранной пружины сначала положить один груз массой  $m$ , общая масса будет  $m_1 = m_0 + m$  (где  $m_0$  - масса подвеса). Пружину осторожно оттянуть вниз на (1...1,5) см и отпустить. По секундомеру измерить время  $t$ , в течение которого совершается  $n$  колебаний.

Таблица 3.13

$k = \text{const}$

	$m_1 = \dots$			$m_2 = \dots$			$m_3 = \dots$			$m_4 = \dots$		
№ п.п	$t_1$ с	$n_1$	$T_1$ с	$t_2$ с	$n_2$	$T_2$ с	$t_3$ с	$n_3$	$T_3$ с	$t_4$ с	$n_4$	$T_4$ с
1												
2												
3												
Средние	$T_{1\text{cp}} = \dots$			$T_{2\text{cp}} = \dots$			$T_{3\text{cp}} = \dots$			$T_{4\text{cp}} = \dots$		
	$T_{1\text{cp}}^2 = \dots$			$T_{2\text{cp}}^2 = \dots$			$T_{3\text{cp}}^2 = \dots$			$T_{4\text{cp}}^2 = \dots$		

2. Подсчитать период колебаний пружины с одним грузом по формуле  $T = t/n$ . Результаты записать в табл.3.13.

3. Измерения по п.п 1 – 2 повторить не менее трех раз при различных значениях числа колебаний  $n$ . Найти среднее значение периода колебаний  $T_1$  с грузом  $m_1$  как среднее арифметическое из нескольких измерений.

4. Повторить измерения по п.п 1...3, положив на подвес этой же пружины два ( $m_2 = m_0 + 2m$ ), три и четыре груза. Результаты занести в табл.3.13.

5. По результатам измерений построить график, аналогичный показанному на рис.3.18.

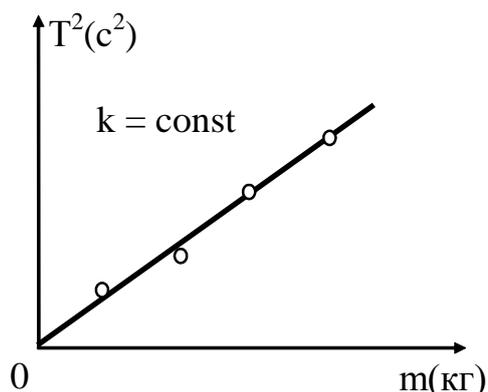


Рис. 3.18

### Упражнение 2.

Проверка зависимости  $T^2 = f(1/k)$  при  $m = \text{const}$ .

1. Найти коэффициенты возвращающей силы  $k$ . Для этой цели по линейке отметить начальное положение пружины 1 с подвесом (без грузов)  $N_0$  (рис.3.19). Положив на подвес добавочный груз  $m$  отметить положение пружины  $N_1$  с массой  $m_1 = m + m_0$ . Смещение пружины под действием груза  $m$  равно  $(N_1 - N_0)$ . Коэффициент возвращающей силы  $k'_1$  рассчитывается по формуле

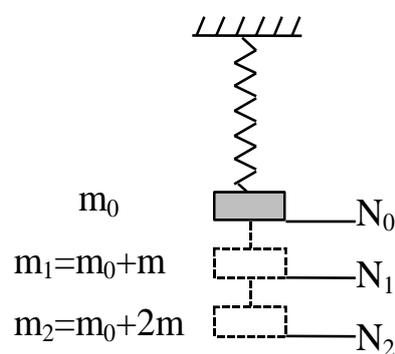


Рис. 3.19

$$k'_1 = \frac{(m_i - m_{i-1})g}{N_i - N_{i-1}} = \frac{mg}{N_i - N_{i-1}}, \quad (3.89)$$

где  $i$  - номер груза.

2. Добавляя постепенно грузы рассчитать по формуле (3.89) значения коэффициента возвращающей силы  $k''_1, k'''_1 \dots$  для той же пружины 1. Результаты измерений занести в табл.3.14.

3. Найти среднее арифметическое значение  $k_1$  для первой пружины.

4. Измерения по п.п 1...3 повторяют для второй и третьей пружины.

5. Рассчитать средние значения  $1/k_1, 1/k_2, 1/k_3$  и записать в табл.3.15.

Таблица 3.14

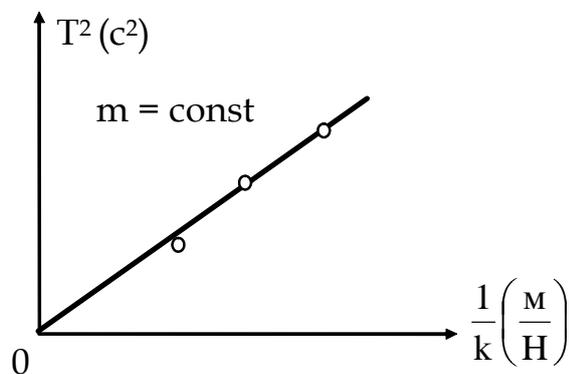
Номер пружины	Номер измерения	$m_i g$ Н	N м	$N_i - N_{i-1}$ м	k Н/м
1	1				
	2				
	3				
	4				
Среднее $k_1 =$					
2	1				
	2				
	3				
	4				
Среднее $k_2 =$					
3	1				
	2				
	3				
	4				
Среднее $k_3 =$					

6. На первую пружину положить два (или любое другое число) груза и по секундомеру измерить время  $t$ , в течение которого совершается  $n$  колебаний.

7. Рассчитать период колебаний первой пружины по формуле  $T = t/n$ . Результаты записать в табл.3.15.

8. Измерения по п.п 6–7 повторить не менее трех раз при различных значениях числа колебаний  $n$ . Найти среднее значение периода колебаний  $T_1$  первой пружины как среднее арифметическое из нескольких измерений.

9. Повторить измерения по п.п 6...8 для двух других пружин с теми же грузами. Измерения занести в табл.3.15.



10. По результатам измерений построить график, аналогичный показанному на рис.3.20.

11. Рассчитать доверительную и относительную погрешность измерений для одного из опытов.

Таблица 3.15

 $m = \text{const}$ 

	$\frac{1}{k_1} = \dots$			$\frac{1}{k_2} = \dots$			$\frac{1}{k_3} = \dots$		
№ п.п	$t_1$ с	$n_1$	$T_1$ с	$t_2$ с	$n_2$	$T_2$ с	$t_3$ с	$n_3$	$T_3$ с
1									
2									
3									
Средние	$T_{1\text{cp}} = \dots$ $T_{1\text{cp}}^2 = \dots$			$T_{2\text{cp}} = \dots$ $T_{2\text{cp}}^2 = \dots$			$T_{3\text{cp}} = \dots$ $T_{3\text{cp}}^2 = \dots$		

### Контрольные вопросы

1. Написать дифференциальное уравнение для колебания груза на пружине.
2. Как в работе определяется коэффициент возвращающей силы пружины?
3. От чего зависит период колебаний пружинного маятника?

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 14

### Исследование крутильных колебаний

Цель работы: изучение зависимости периода крутильных колебаний от момента инерции тела и упругих свойств проволоки.

#### Методика измерений и экспериментальная установка

В данной работе исследуются гармонические колебания крутильного маятника - тела, подвешенного на проволоке, относительно оси симметрии, совпадающей с проволокой (рис.3.21). Период таких колебаний выражается формулой (3.30)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{c}},$$

откуда

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{J}{c}, \quad (3.90)$$

где  $J$  – момент инерции тела;  $c$  – коэффициент возвращающего момента.

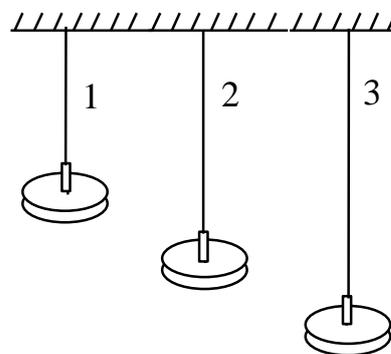


Рис. 3.21

Целью работы является экспериментальная проверка соотношения (3.90).

Измерив период колебаний крутильного маятника для различных значений момента инерции  $J$  при  $c = \text{const}$ , можно получить график зависимости квадрата периода колебаний  $T^2$  от момента инерции  $J$  колеблющегося тела. График функции  $T^2 = f(J)$  в соответствии (3.90) должен быть прямой линией, проходящей через начало координат.

Измерив период колебаний для различных значений  $c$  и одного и того же тела ( $J = \text{const}$ ), можно получить график зависимости  $T^2 = f(1/c)$ . График этой функции также должен быть прямой линией, проходящей через начало координат.

Экспериментальная установка (рис.3.21) состоит из перекладины, к которой прикреплены три проволоки разной длины  $L_1, L_2, L_3$ , обладающие различными упругими свойствами. К проволокам прикреплены подвесы 1, 2, 3, на которые помещают одинаковые цилиндрические грузы с известным значением момента инерции. Число грузов на каждой проволоке можно изменять, следовательно, можно изменять и момент инерции колеблющейся системы. Момент инерции подвеса  $J_{\text{п}}$  для данной установки мал и при расчетах им можно пренебречь.

Коэффициент возвращающего момента может быть определен по формуле (3.25):

$$c = \frac{\pi G}{2} \cdot \frac{r^4}{L}, \quad (3.91)$$

где  $G$  - модуль сдвига, характеризующий упругие свойства материала проволоки,  $r$  - радиус проволоки;  $L$  - длина проволоки.

Значения модуля сдвига  $G$ , радиуса проволоки  $r$ , а также момента инерции груза  $J$  и приведены в таблице на подставке установки.

## Порядок выполнения работы

### Упражнение 1.

Проверка зависимости  $T^2 = f(J)$  при  $c = \text{const}$ .

1. Найти опытным путем периоды колебаний одного, двух, трех и т.д. грузов на подвесе на одной и той же проволоке. Для этого на подвес сначала поместить один груз с моментом инерции  $J$ , суммарный момент инерции системы будет  $J_1 = J$ . Подвес с грузом осторожно повернуть в горизонтальной плоскости на небольшой угол (не допуская раскачивания груза) и отпустить. По секундомеру замерить время  $t$ , в течение которого совершается  $n$  полных крутильных колебаний.

2. Подсчитать период колебаний проволоки с одним грузом по формуле  $T = t/n$ .

3. Измерения по п.п 1 - 2 повторить не менее трех раз при различных значениях числа колебаний  $n$ . Найти среднее значение периода колебаний  $T_1$  с одним грузом как среднее арифметическое из трех измерений. Результаты занести в табл.3.16.

Таблица 3.16

 $c = \text{const}$ 

№ п.п	$J_1 = \dots$			$J_2 = \dots$			$J_3 = \dots$			$J_4 = \dots$		
	$t_1$ с	$n_1$	$T_1$ с	$t_2$ с	$n_2$	$T_2$ с	$t_3$ с	$n_3$	$T_3$ с	$t_4$ с	$n_4$	$T_4$ с
1												
2												
3												
Средние	$T_{1\text{cp}} = \dots$			$T_{2\text{cp}} = \dots$			$T_{3\text{cp}} = \dots$			$T_{4\text{cp}} = \dots$		
	$T_{1\text{cp}}^2 = \dots$			$T_{2\text{cp}}^2 = \dots$			$T_{3\text{cp}}^2 = \dots$			$T_{4\text{cp}}^2 = \dots$		

4. Повторить измерения по п.п 1...3, помещая на подвес этой же проволоки два ( $J_2 = 2J$ ), три и четыре груза.

5. По результатам измерений построить график, аналогичный показанному на рис.3.22.

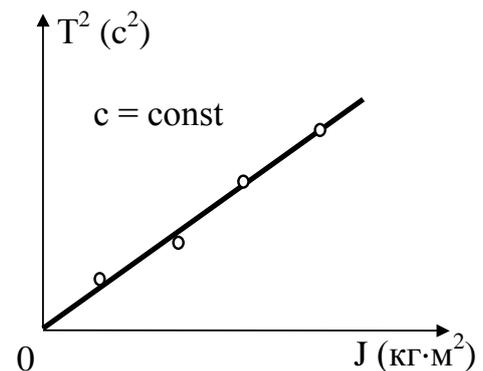


Рис. 3.22

### Упражнение 2.

Проверка зависимости  $T^2 = f(1/c)$  при  $J = \text{const}$ .

1. Рассчитать коэффициенты возвращающего момента  $c$  для каждой проволоки по формуле (3.91) и найти величины  $\frac{1}{c_1}$ ,  $\frac{1}{c_2}$ ,  $\frac{1}{c_3}$ .

Результаты расчетов записать в табл. 3.17.

2. На первую проволоку положить груз (или несколько) и по секундомеру измерить время  $t$ , в течение которого совершается  $n$  колебаний.

3. Рассчитать период колебаний первой проволоки по формуле  $T_1 = t/n$ . Результаты записать в табл.3.17.

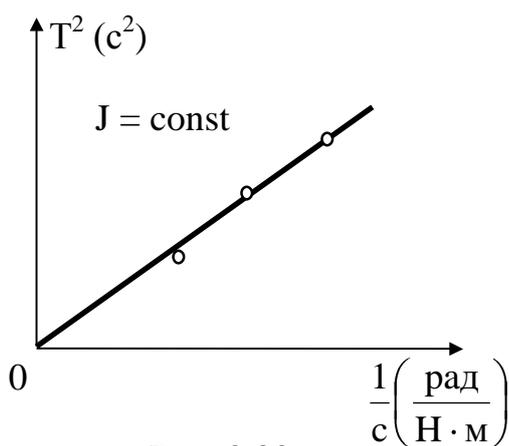
4. Измерения по п.п 2–3 повторить не менее трех раз при различных значениях числа колебаний  $n$ . Найти среднее значение

периода колебаний  $T_1$  первой проволоки, как среднее арифметическое из нескольких измерений.

Таблица 3.17

$J = \text{const}$

	$\frac{1}{c_1} = \dots$			$\frac{1}{c_2} = \dots$			$\frac{1}{c_3} = \dots$		
№ п.п	$t_1$ с	$n_1$	$T_1$ с	$t_2$ с	$n_2$	$T_2$ с	$t_3$ с	$n_3$	$T_3$ с
1									
2									
3									
Средние	$T_{1\text{cp}} = \dots$ $T_{1\text{cp}}^2 = \dots$			$T_{2\text{cp}} = \dots$ $T_{2\text{cp}}^2 = \dots$			$T_{3\text{cp}} = \dots$ $T_{3\text{cp}}^2 = \dots$		



5. Повторить измерения по п.п 2...4 для двух других проволок с тем же грузом. Измерения занести в табл.3.17.

6. По результатам измерений построить график, аналогичный показанному на рис.3.23.

7. Рассчитать доверительную и относительную погрешность измерений для одного из опытов.

### Контрольные вопросы

1. Написать дифференциальное уравнение крутильных колебаний.
2. Как в работе определяется коэффициент возвращающего момента?
3. От чего зависит период крутильных колебаний?

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4

### Изучение затухающих колебаний наклонного маятника

Цель работы: Изучение колебаний наклонного маятника, расчет коэффициентов трения качения для различных углов наклона маятника и различных материалов.

### Методика измерений

Существуют различные виды трения. Трение качения без скольжения, возникающее, например, при качении цилиндра или шарика по горизонтальной или наклонной плоскостям называют *сухим трением*. Другим видом трения является вязкое трение при движении тела в жидкой или газообразной среде.

Затухающие колебания при наличии вязкого трения были рассмотрены в разделе 3.2. В данной работе рассматриваются затухающие колебания наклонного маятника – шарика, подвешенного на нити и катящегося по наклонной плоскости.

Причиной затухания колебаний в этом случае является наличие силы трения качения, зависящей от свойств материалов шарика и наклонной плоскости. При качении шарик и плоский образец деформируются из-за составляющей силы тяжести, прижимающей шарик к наклонной плоскости.

Если эти деформации мгновенно упруги, то силы взаимодействия между шариком и плоскостью ( $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$ ) будут симметричны (рис.3.24а).

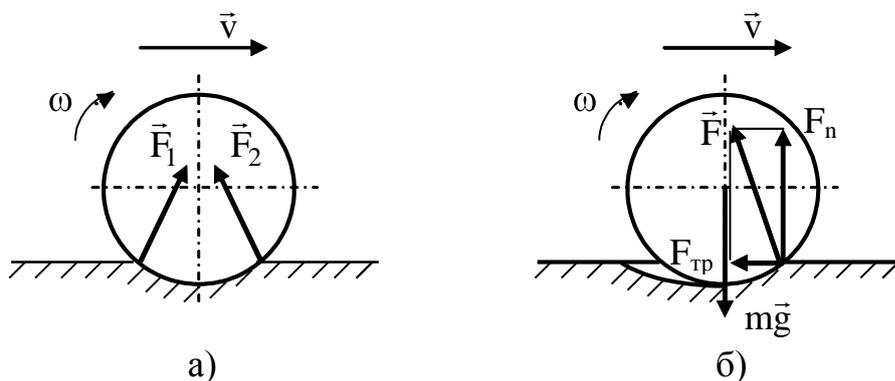


Рис. 3.24

В реальных условиях даже малая упругая деформация шара и поверхности не исчезает мгновенно (рис.3.24б). В результате действующая на шарик (распределенная по месту контакта) результирующая сила взаимодействия  $\vec{F}$  будет направлена не вертикально. Ее составляющая  $F_n$  по величине равна силе тяжести  $mg$ , а горизонтальная составляющая  $F_{тр}$  является силой трения качения.

Опыт показывает, что сила трения качения, действующая на катящийся по плоскости шар, прямо пропорциональна силе нормального давления  $F_n$  и обратно пропорциональна радиусу шара

$$F_{тр} = k \frac{F_n}{R}. \quad (3.92)$$

Здесь  $k$  – коэффициент трения качения (при отсутствии скольжения) имеет размерность длины [м].

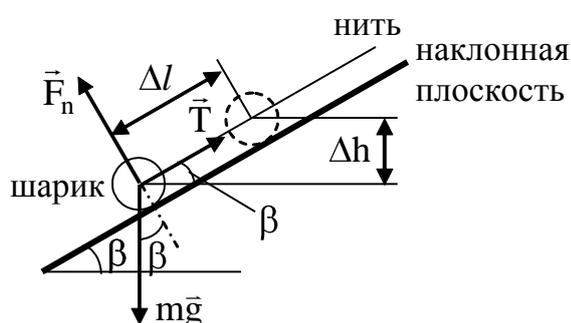


Рис. 3.25

В данной работе коэффициент трения качения шара определяется методом наклонного маятника. Наклонным маятником является шарик, закрепленный на нити и катающийся по наклонной плоскости (рис.3.25).

На рисунке:  $\beta$  - угол наклона плоскости к горизонту,  $\vec{T}$  – сила,

действующая на шарик со стороны нити. Величину силы нормального давления, действующей на шарик, можно записать в виде

$$F_n = mg \cos \beta, \quad (3.93)$$

где  $mg$  – сила тяжести шарика.

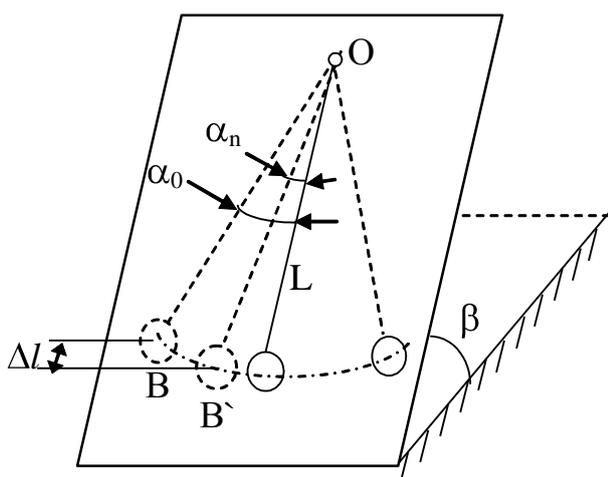


Рис. 3.26

Затухание колебаний наклонного маятника обусловлено, в основном, действием силы трения качения. Если вывести шарик из положения равновесия, то он начнет перекачиваться по плоскости (рис.3.26), причем его движение будет иметь характер затухающих колебаний.

Расчет коэффициента трения качения основан на измерении уменьшения угловой амплитуды колебаний маятника от  $\alpha_0$  до  $\alpha_n$

за определенное число периодов колебаний. Формулу для расчета коэффициента трения можно получить, приравняв работу сил трения качения ( $A_{тр}$ ) к уменьшению потенциальной энергии маятника ( $\Delta U$ ).

$$A_{тр} = \Delta U. \quad (3.94)$$

За  $n$  циклов колебаний при переходе из положения  $B$  в положение  $B'$  (рис.3.26) изменение энергии маятника равно

$$\Delta U = -mg \Delta h, \quad (3.95)$$

где  $\Delta h = \Delta l \cdot \sin \beta$  - потеря высоты центром тяжести маятника.

Следовательно, получаем

$$\Delta U = -mg \Delta l \sin \beta. \quad (3.96)$$

Работу сил трения качения можно записать в виде

$$A_{\text{тр}} = -F_{\text{тр}} s, \quad (3.97)$$

где  $s$  – путь шарика при качении по наклонной плоскости, а силу трения качения с учетом формул (3.92) и (3.93) можно представить в виде

$$F_{\text{тр}} = k \frac{mg \cos \beta}{R}. \quad (3.98)$$

Следовательно, соотношение (3.94) примет вид

$$-mg \Delta l \sin \beta = -k \frac{mg \cos \beta}{R} s$$

или

$$\Delta l \sin \beta = k \frac{\cos \beta}{R} s. \quad (3.99)$$

Отсюда выражаем коэффициент трения качения

$$k = \frac{\Delta l \cdot R}{s} \operatorname{tg} \beta. \quad (3.100)$$

Путь  $s$ , проходимый шариком за  $n$  периодов (суммарную длину дуги), можно записать следующим образом (рис.3.26)

$$s \cong 4L n \alpha_{\text{ср}},$$

где  $\alpha_{\text{ср}} = \frac{\alpha_0 + \alpha_n}{2}$ . Тогда получаем

$$s = 4L n \frac{\alpha_0 + \alpha_n}{2} = 2L n (\alpha_0 + \alpha_n). \quad (3.101)$$

Из рис.3.26 можно получить

$$\Delta l \cong L \cos \alpha_n - L \cos \alpha_0 = L (\cos \alpha_n - \cos \alpha_0). \quad (3.102)$$

Здесь  $\alpha_0$  – угловая амплитуда маятника в начальный момент времени,  $\alpha_n$  – угловая амплитуда маятника через  $n$  периодов колебаний.  $L$  – длина маятника ( $L \gg R$ ).

Если  $\alpha$  – малый угол, то  $\cos \alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}$ , как результат разложения  $\cos \alpha$  в ряд и пренебрежения последующими членами ряда. То есть, считая  $\alpha_0$  и  $\alpha_n$  малыми углами, можно записать

$$\Delta l = L (\cos \alpha_n - \cos \alpha_0) \cong L \left( 1 - \frac{\alpha_n^2}{2} - 1 + \frac{\alpha_0^2}{2} \right) = \frac{L}{2} (\alpha_0^2 - \alpha_n^2). \quad (3.103)$$

Подставляя (3.101) и (3.103) в выражение для коэффициента трения качения (3.100), получаем расчетную формулу

$$k = \frac{(\alpha_0 - \alpha_n) R \operatorname{tg} \beta}{4n}. \quad (3.104)$$

### Экспериментальная установка

В работе для определения коэффициента трения качения используется экспериментальная установка, общий вид которой приведен на рис.3.27.

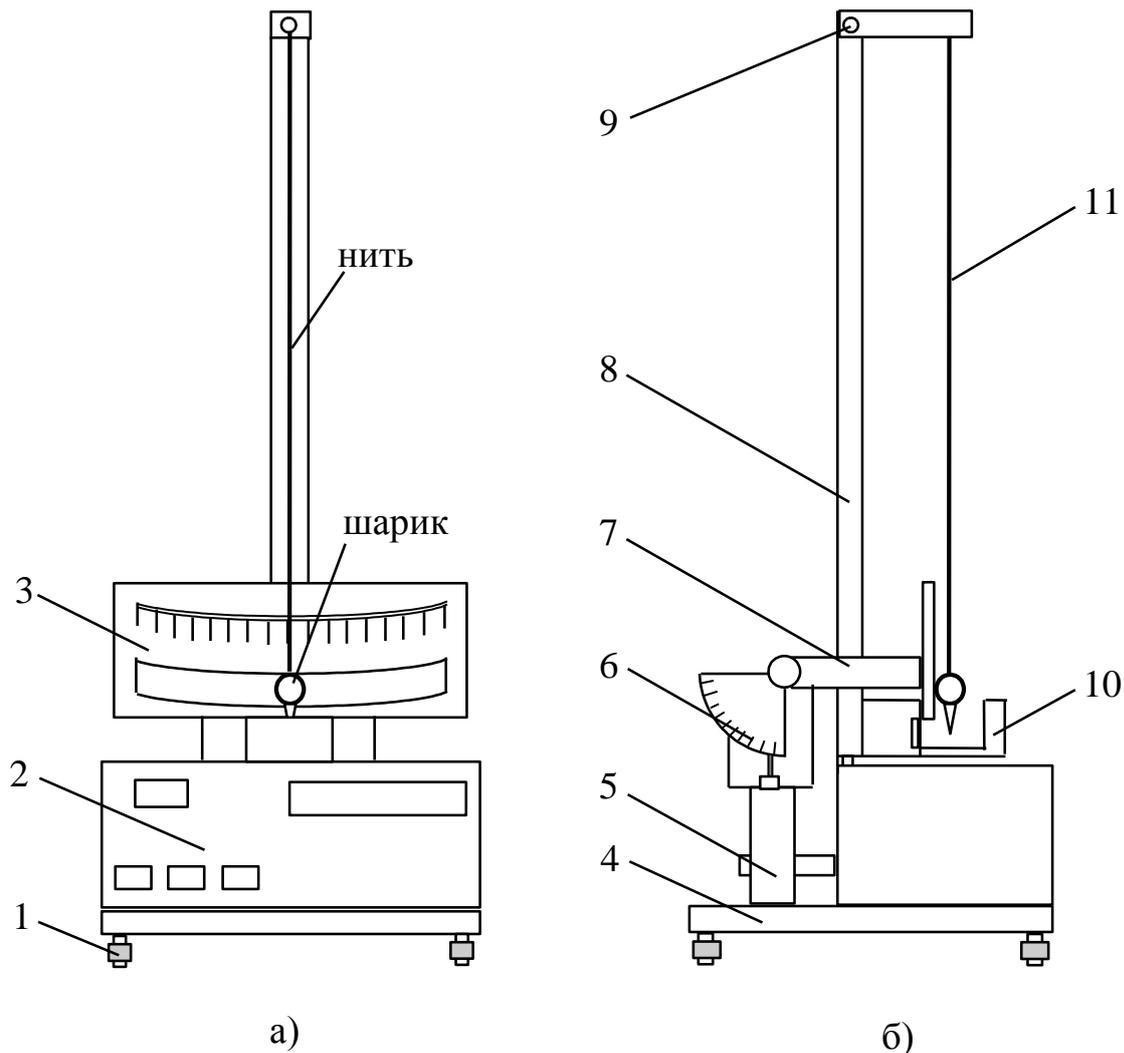


Рис. 3.27

На вертикальной стойке 5 основания 4 находится червячный редуктор. С его помощью осуществляется поворот и фиксация нижнего кронштейна 7. Редуктор приводится во вращение маховичком. Отсчет угла наклона образца производится по шкале 6. На нижнем кронштейне 7 крепятся: шкала 3 отсчета угловых амплитуд колебаний маятника, стержень 8, на который крепится верхний кронштейн 9, и фотоэлектрический датчик 10.

Шкала 3 представляет собой пластину, в которой имеется гнездо для установки сменных образцов. По шкале определяется угол отклонения маятника в пределах от нуля (положение равновесия) до  $11^\circ$ . Зеркальный отражатель шкалы 3 служит для уменьшения погрешности параллакса<sup>1</sup> при отсчете угла отклонения маятника.

Образцы представляют собой прямоугольные пластинки из различных материалов, рабочие поверхности пластинок разной чистоты обработки. Кронштейн 9 содержит механизм подвеса для регулировки длины маятника.

Маятник 11 представляет собой металлический шарик, подвешенный на тонкой нити. К шарiku прикреплен острый конус для пересечения оптической оси фотоэлектрического датчика 10.

Фотоэлектрический датчик 10 размещается на нижнем кронштейне и подает электрические сигналы на миллисекундомер 2, который является прибором с цифровой индикацией времени и числа полных периодов колебаний маятника.

### Порядок выполнения работы

1. При помощи опорных винтов 1 установить прибор так, чтобы нить маятника 11 оказалась напротив нулевого деления шкалы 3.

2. Отрегулировать длину маятника с помощью устройства на верхнем кронштейне 9 так, чтобы при колебании маятника шарик перемещался по рабочей поверхности образца, не касаясь шкалы 3. Для этого с помощью специальной отвертки необходимо ослабить вертикальный стопорный винт и, вращая винт, установить необходимую длину маятника.

3. Измерить радиус шарика с помощью штангенциркуля и записать полученное значение в табл.3.18.

Таблица 3.18.

Образец № 1 \_\_\_\_\_ (материал)

№ п.п.	R	$\alpha_0$	$\alpha_n$	$\beta = 30^\circ$			$\beta = 45^\circ$			$\beta = 60^\circ$		
				n	$\bar{n}$	k	n	$\bar{n}$	k	n	$\bar{n}$	k
1												
2												
3												
4												
5												

<sup>1</sup> Параллакс – изменение видимого положения объекта относительно удаленного фона в зависимости от положения наблюдателя.

3. Включить в сеть шнур питания миллисекундомера ~220 В.
4. С помощью маховика по шкале 6 установить угол наклона маятника  $\beta = 30^\circ$ .
5. Нажать на кнопку «Сеть», расположенную на лицевой панели миллисекундомера 2, при этом должны загореться цифровые индикаторы – нули.
6. Отклонить маятник от положения равновесия на угол  $\alpha_0 = 6^\circ$  и отпустить. При достижении маятником угловой амплитуды колебаний  $\alpha_n = 2^\circ$  нажать на кнопку «Стоп» миллисекундомера.
7. Снять с миллисекундомера количество  $n$  полных колебаний маятника и занести полученный результат в табл.3.18.
8. Измерения по п.п. 6-7 повторить еще 4 раза, занося данные в табл.3.18.
9. Рассчитать среднее значение числа колебаний  $\bar{n}$ .
10. По среднему значению  $\bar{n}$  с помощью формулы (3.104) определить значение коэффициента трения качения  $k$  и записать в табл.3.18. При расчете углы  $\alpha_0$  и  $\alpha_n$  подставлять **в радианах**.
11. Измерения по п.п. 6-10 повторить для угла наклона плоскости образца  $\beta = 45^\circ$  и  $\beta = 60^\circ$ . Все данные занести в табл. 3.18.
12. Произвести измерения по п.п. 4-11 для другого образца и занести полученные результаты в табл. 3.19.

Таблица 3.19

Образец № 2 \_\_\_\_\_ (материал)

№ п.п.	R	$\alpha_0$	$\alpha_n$	$\beta = 30^\circ$			$\beta = 45^\circ$			$\beta = 60^\circ$		
				n	$\bar{n}$	k	n	$\bar{n}$	k	n	$\bar{n}$	k
1												
2												
3												
4												
5												

13. Для обоих образцов построить графики зависимости коэффициента трения качения от угла наклона плоскости к горизонту  $k = f(\beta)$ .
14. Выключить миллисекундомер из сети.
15. Рассчитать погрешность измерений  $k$  для одного из углов наклона  $\beta$ .

### Контрольные вопросы

1. Какие виды трения вы знаете?
2. Какова физическая природа силы трения качения?

3. Что такое коэффициент трения качения?
4. Почему значения угловой амплитуды надо брать малыми?
5. Как и почему сила трения качения зависит от радиуса шарика  $R$ ?
6. Зависит ли сила трения качения от величины поверхности соприкосновения?
7. Имеет ли размерность коэффициент трения качения?

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 19

### Определение скорости звука в воздухе методом интерференции

Цель работы: определение скорости звука в воздухе и изучение явления интерференции волн.

#### Методика измерений и экспериментальная установка

Установка для измерения скорости звука интерференционным методом состоит из двух коленчатых трубок (рис.3.28), одно колено ABD имеет постоянную длину; длину другого колена ACD можно изменять приподнимая или опуская подвижную часть 2.

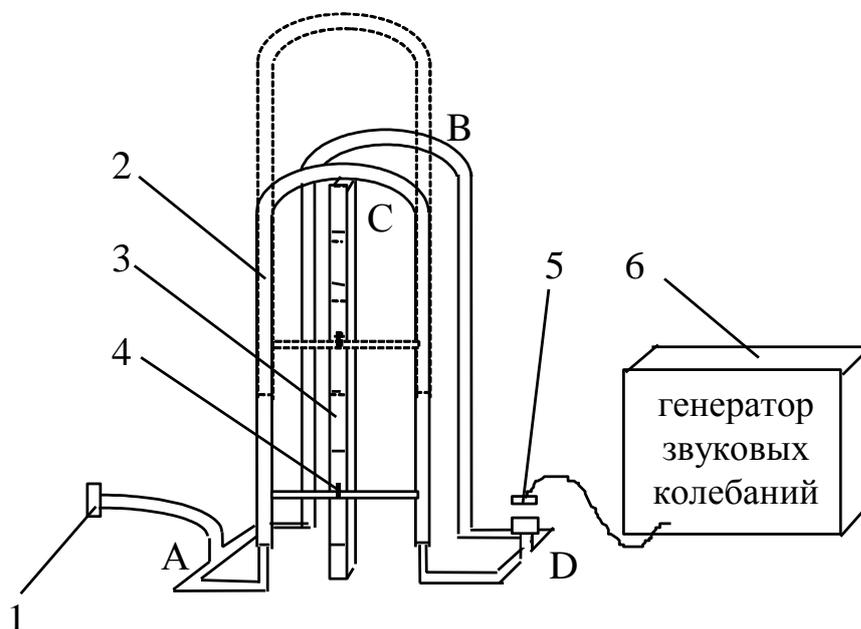


Рис. 3.28

Звук частоты  $f$ , создаваемый в телефоне 5 генератором звуковых колебаний, направляется в трубку D, где он разделяется на две звуковые волны в направлении пути ABD и ACD. В трубке A волны интерферируют, так как здесь складываются две когерентные волны. Разность фаз этих волн определяется разностью путей в коленах

установки. Трубка А соединена со слуховой трубкой 1. Удлинение колена АСД определяется по шкале 3.

Из соотношения (3.49) следует, что для определения скорости звука необходимо знать длину звуковой волны  $\lambda$  и частоту  $f$ . В данном методе длину звуковой волны можно определить путем измерения разности хода волн, соответствующей максимальному ослаблению звука вследствие интерференции. Два соседних минимума при интерференции соответствуют изменению разности хода волн на  $\lambda$  (см. формулу 3.56).

Разность хода волн в двух трубках равна удвоенному удлинению колена АСД, поэтому положения указателя 4, соответствующие двум соседним минимумам звука, отстоят друг от друга на  $\Delta L = \frac{\lambda}{2}$ . Частота  $f$  звука определяется по шкале звукового генератора. Следовательно, при температуре опыта

$$v = 2\Delta Lf, \quad (3.105)$$

где  $\Delta L$  - расстояние между двумя положениями указателя 4, соответствующими соседним минимумам звука.

Скорость звуковых волн в идеальных газах зависит от температуры газа и определяется соотношением

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}}, \quad (3.106)$$

где  $T$  - температура;  $\mu$  - молярная масса;  $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$  - отношение теплоемкостей при постоянном давлении и при постоянном объеме;  $R$  - универсальная газовая постоянная.

Величины  $\mu$  и  $\gamma$  в условиях данной работы являются постоянными. Из формул (3.105) и (3.106) следует выражение для расчета скорости звуковых волн в воздухе при нормальных условиях ( $T_0 = 273 \text{ K}$ ):

$$v_0 = 2\Delta Lf \cdot \sqrt{\frac{T_0}{T}}. \quad (3.107)$$

### Порядок выполнения работы

1. Подключить трубку телефона 5 к генератору звуковых колебаний 6 и разместить ее в соответствующем гнезде прибора (рис.3.28). Установить перед началом опыта одинаковые длины трубок прибора.

2. Включить генератор тумблером “Сеть” и дать ему прогреться в течение 1...2 мин. Установить на генераторе звуковых колебаний частоту  $f = 1500 \text{ Гц}$ .

3. Услышав звук в слуховой трубке 1, медленно перемещать подвижное колено 2 прибора. Определить показания  $L$  по шкале 3, соответствующие положению указателя 4 при всех последовательных минимумах звука. Результаты измерений записать в табл.3.20.

Таблица 3.20

Номер измерения	$f$ Гц	$L$ м	$\Delta L$ м	$\Delta \bar{L}$ м	$T$ К	$v_0$ м/с
1						
2						
3						

4. Рассчитать расстояния  $\Delta L$  между всеми последовательными положениями указателя 4:

$$\Delta L = L_{k+1} - L_k,$$

где  $k$  - номер минимума звука. Результаты занести в табл. 3.20.

5. Определить среднее значение  $\Delta \bar{L}$  для данной частоты колебаний.

6. Измерения по п.п 3...5 повторить для трех значений частоты колебаний  $f$  в диапазоне, равном (1500 - 6000) Гц.

7. Измерить температуру  $T$  в помещении лаборатории.

8. Определить для каждого значения частоты колебаний скорость звука по формуле (3.107).

9. Рассчитать доверительную и относительную погрешность измерения.

### Контрольные вопросы

1. В чем заключается условия минимума и максимума звука при интерференции двух волн?

2. Для чего в работе необходимо перемещать колено прибора?

3. В чем заключается метод определения скорости звука на основе явления интерференции?

## Вопросы по разделу 3

1. Какое движение называется гармоническим колебанием? Каковы характеризующие его уравнения?
2. Что такое коэффициент возвращающей силы и коэффициент возвращающего момента силы? Каков физический смысл этих коэффициентов?
3. Покажите, что при гармонических колебаниях полная энергия системы сохраняется постоянной.
4. Что называется физическим и математическим маятником? Чему равны периоды их колебаний?
5. Получите дифференциальное уравнение колебаний физического маятника.
6. Получите дифференциальное уравнение гармонических крутильных колебаний.
7. Какими уравнениями характеризуются затухающие колебания?
8. Что такое коэффициент затухания и от чего он зависит?
9. Что называется логарифмическим декрементом затухания?
10. Каков физический смысл коэффициента затухания и логарифмического декремента затухания?
11. Какими уравнениями характеризуются вынужденные колебания?
12. Какова частота установившихся вынужденных колебаний?
13. Что такое резонанс и когда он возникает?
14. От чего зависит резонансная частота механических колебаний?
15. Что называется упругой волной? От чего зависит скорость продольных и поперечных упругих волн?
16. Напишите уравнение плоской гармонической волны, используя понятия фазовой скорости, длины волны и волнового вектора.
17. Какие источники волн и волны называются когерентными?
18. Чему равна разность хода волн при интерференции в точках, где происходит усиление волн?
19. Чему равна разность хода волн при интерференции в точках, где происходит ослабление волн?

## РАЗДЕЛ 4

### Основы термодинамики. Теплоемкость вещества

#### *4.1 Идеальный газ. Первое начало термодинамики*

Термодинамические системы состоят из большого числа частиц. Термодинамический метод исследования основан на описании состояния системы с помощью некоторых макроскопических параметров, характеризующих состояние системы в целом. К ним относятся объем  $V$ , давление  $P$  и температура  $T$ .

Следует заметить, что термодинамика изучает равновесные состояния вещества, при которых термодинамические параметры вещества остаются постоянными и равными своим средним значениям по всему объему (в частности, при равновесном состоянии одинаковы по всему объему температура и давление газа).

Число частиц в термодинамической системе может быть записано как

$$N = \nu N_A, \quad (4.1)$$

где  $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$  1/моль – число Авогадро,  $\nu$  – количество вещества (число молей вещества), равное

$$\nu = \frac{m}{\mu}. \quad (4.2)$$

Здесь  $\mu$  – молярная масса вещества.

Из формулы (4.1) следует, что в одном моле вещества содержится  $N_A$  частиц (атомов и молекул).

Рассмотрим в качестве термодинамической системы идеальный газ. Идеальным называется газ, молекулы которого можно рассматривать как материальные точки, взаимодействие которых между собой происходит только в момент соударения.

Связь между термодинамическими параметрами для идеального газа описывается *уравнением состояния* (уравнением Менделеева - Клапейрона), которое имеет вид:

$$PV = \frac{m}{\mu} RT, \quad (4.3)$$

где  $m$  – масса газа,  $R$  – универсальная газовая постоянная (в системе СИ  $R = 8,31$  Дж/(моль·К)).

Для одного моля ( $\nu = 1$  моль) идеального газа уравнение состояния запишется следующим образом:

$$PV = RT \quad (4.4)$$

Поскольку при условиях, близких к нормальным ( $P_0 = 1,01 \cdot 10^5$  Па,  $T_0 = 273,15$  К) силы взаимодействия между молекулами и объем, занимаемый молекулами, не оказывают заметного влияния на свойства большинства газов, то они с хорошей точностью подчиняются уравнению состояния (4.3).

Переход термодинамической системы из одного состояния в другое называется термодинамическим процессом\*. Из уравнения состояния для данной массы газа можно получить известные из опыта законы изопрцессов (в которых один из термодинамических параметров постоянен). Графическое изображение изопрцессов на P-V диаграмме показано на рис. 4.1.

1. Изохорический процесс ( $V = \text{const}$ ). Для изохорического процесса из уравнения (4.3) получаем закон Шарля

$$\frac{P}{T} = \text{const}. \quad (4.5)$$

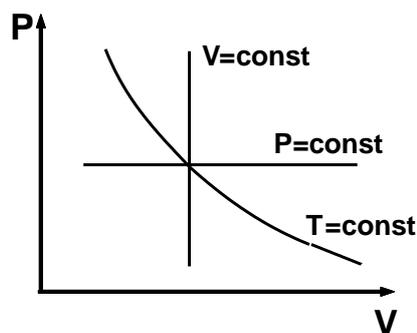


Рис. 4.1

2. Изобарический процесс ( $P = \text{const}$ ). Для изобарического процесса из уравнения (4.3) следует закон Гей-Люссака

$$\frac{V}{T} = \text{const}. \quad (4.6)$$

3. Изотермический процесс ( $T = \text{const}$ ). Для изотермического процесса из уравнения (4.3) получаем закон Бойля - Мариотта

$$PV = \text{const}. \quad (4.7)$$

Изменение термодинамических параметров системы возможно за счет обмена энергией между термодинамической системой и внешними телами. Причем обмен энергией можно осуществить двумя различными способами: путем теплообмена и путем совершения работы.

Закон сохранения энергии в этих случаях отражает *первое начало термодинамики*: количество теплоты  $\delta Q$ , подведенное к системе, расходуется на изменение внутренней энергии  $dU$  системы и на совершение системой работы  $\delta A$  против внешних сил:

$$\delta Q = dU + \delta A. \quad (4.8)$$

Или для конечного процесса 1-2

\* Термодинамика изучает только равновесные процессы, при которых система проходит ряд последовательных равновесных состояний.

$$Q_{1-2} = \Delta U_{1-2} + A_{1-2}. \quad (4.9)$$

Количество теплоты считается положительным, если оно подводится к системе и отрицательным – если отводится от системы.

Внутренняя энергия системы является функцией состояния и не зависит от вида процесса. Бесконечно малое изменение внутренней энергии  $dU$  является, следовательно, полным дифференциалом, то есть

$$\Delta U_{1-2} = \int_1^2 dU = U_2 - U_1. \quad (4.10)$$

Количество теплоты  $Q_{1-2}$  и работа  $A_{1-2}$  не являются функциями состояния и зависят от способа перехода системы из начального состояния в конечное, т.е. от вида процесса. Поэтому  $\delta Q$  и  $\delta A$  не являются полными дифференциалами.

Элементарная работа газа при бесконечно малом изменении его объема может быть записана как:

$$\delta A = P \cdot dV. \quad (4.11)$$

Или для перехода из состояния 1 в состояние 2

$$A_{1-2} = \int_{V_1}^{V_2} P dV. \quad (4.12)$$

Работа газа положительна, если в процессе происходит расширение газа (объем газа увеличивается  $dV > 0$ ), и отрицательна при уменьшении объема газа ( $dV < 0$ ).

## 4.2 Теплоемкость

Теплоемкостью называется величина, равная количеству теплоты, которое нужно сообщить телу, чтобы повысить его температуру на один Кельвин.

Если при сообщении телу количества теплоты  $\delta Q$  температура тела повышается на  $dT$ , то согласно определению теплоемкость

$$C = \frac{\delta Q}{dT}. \quad (4.13)$$

Теплоемкость одного моля вещества называется молярной теплоемкостью

$$C^{\text{мол}} = \frac{C}{\nu}. \quad (4.14)$$

Единицей молярной теплоемкости в системе СИ является Дж/(моль·К).

Теплоемкость единицы массы вещества называется удельной теплоемкостью

$$c^{\text{уд}} = \frac{C}{m}. \quad (4.15)$$

Единицей удельной теплоемкости в системе СИ является Дж/(кг·К).

Молярная и удельная теплоемкости связаны соотношением

$$c^{уд} = \frac{C^{мол}}{\mu}. \quad (4.16)$$

Величина теплоемкости вещества зависит от условий, при которых происходит нагревание.

Рассмотрим нагревание одного моля газа при постоянном объеме. В этом случае  $\delta A = 0$  и в соответствии с (4.8) все полученное газом количество теплоты идет на увеличение внутренней энергии газа

$$\delta Q_V = dU.$$

Следовательно, молярная теплоемкость идеального газа при постоянном объеме запишется

$$C_V^{мол} = \frac{\delta Q_V}{dT} = \frac{dU}{dT}. \quad (4.17)$$

Из (4.17) можно получить *формулу для расчета изменения внутренней энергии*  $\nu$  молей идеального газа в любом процессе

$$dU = \nu \cdot C_V^{мол} dT \quad (4.18)$$

или

$$\Delta U_{12} = \nu \cdot C_V^{мол} (T_2 - T_1). \quad (4.19)$$

Тогда, согласно (4.10), внутренняя энергия газа в каком-либо состоянии определяется

$$U = \nu \cdot C_V^{мол} T. \quad (4.20)$$

Теперь рассмотрим нагревание 1 моля газа при постоянном давлении. Если газ нагревается при постоянном давлении, то при расширении газом совершается положительная работа, т.е. полученное газом количество теплоты идет как на увеличение внутренней энергии  $dU$  газа, так и на работу  $\delta A$ , связанную с расширением газа.

$$\delta Q_P = dU + \delta A.$$

Следовательно, теплоемкость газа при постоянном давлении больше, чем его теплоемкость при постоянном объеме:

$$c_P^{мол} = \frac{\delta Q_P}{dT} = \frac{dU}{dT} + P \cdot \left( \frac{dV}{dT} \right)_P. \quad (4.21)$$

Здесь первое слагаемое, согласно выражению (4.17), представляет молярную теплоемкость при постоянном объеме, второе - работу

изобарического расширения одного моля идеального газа при нагревании на 1 К, что, согласно уравнению состояния (4.4), численно равно универсальной газовой постоянной  $R$ .

Следовательно

$$C_P^{\text{мол}} = C_V^{\text{мол}} + R. \quad (4.22)$$

Выражение (4.22) носит название *соотношения Майера*: молярная теплоемкость идеального газа при постоянном давлении больше молярной теплоемкости при постоянном объеме на универсальную газовую постоянную  $R$ .

В термодинамике часто используется величина

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V}, \quad (4.23)$$

равная отношению теплоемкостей газа при постоянном давлении и постоянном объеме. В частности, с помощью этой величины характеризуют изменение параметров идеального газа при адиабатическом процессе.

### Адиабатический процесс

*Адиабатическим* называют процесс, проходящий без теплообмена с внешней средой. На практике адиабатический процесс может быть осуществлен в системе, окруженной теплоизолирующей оболочкой.

Так как при адиабатическом процессе  $\delta Q = 0$ , то первое начало термодинамики принимает вид

$$\delta A = -dU \quad (4.24)$$

т.е. работа, совершаемая системой при адиабатическом процессе, происходит за счет изменения внутренней энергии этой системы.

Учитывая выражения (4.11) и (4.18), уравнение (4.24) для одного моля газа можно представить в виде

$$P \cdot dV = -C_V^{\text{мол}} dT,$$

откуда, используя уравнение состояния идеального газа (4.4), исключаем давление  $P$

$$C_V^{\text{мол}} dT + \frac{RT}{V} dV = 0,$$

или

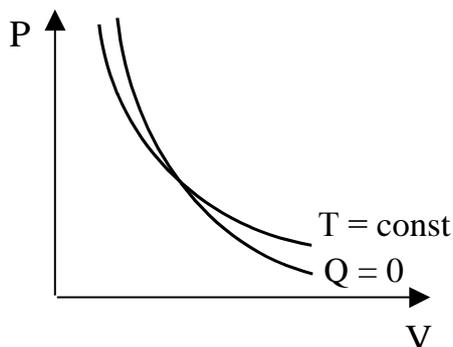
$$\frac{dT}{T} = -\frac{R}{C_V^{\text{мол}}} \cdot \frac{dV}{V}.$$

Произведя интегрирование, получим

$$T \cdot V^{R/C_V^{\text{мол}}} = \text{const.}$$

Учитывая, что  $R = C_P^{\text{мол}} - C_V^{\text{мол}}$  (см. 4.22) и  $C_P^{\text{мол}}/C_V^{\text{мол}} = \gamma$ , после несложных преобразований находим

$$T \cdot V^{\gamma-1} = \text{const.} \quad (4.25)$$



Воспользовавшись уравнением состояния идеального газа (4.4), можно уравнение (4.25) записать в виде

$$P \cdot V^\gamma = \text{const.} \quad (4.26)$$

Это уравнение адиабаты идеального газа в переменных  $P - V$  получило название уравнения Пуассона. Графики адиабатического (4.26) и изотермического процессов в координатах  $P - V$  показаны на рис.4.2.

### Классическая теория теплоемкости газов

В основе классической теории теплоемкости лежит установленное статистической физикой *положение о равномерном распределении кинетической энергии* по степеням свободы молекул, согласно которому на каждую степень свободы молекулы приходится в среднем энергия, равная  $(1/2)kT$  (где  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К - постоянная Больцмана).

Под числом степеней свободы понимают количество независимых координат, определяющих положение молекулы в пространстве.

Модель молекулы идеального газа - материальная точка лучше всего соответствует одноатомным газам. Положение одноатомной молекулы в пространстве может быть задано значением трех ее координат (например,  $x, y, z$ ). Поскольку изменение положения одноатомной молекулы обусловлено только ее поступательным движением, то соответствующие степени свободы называют поступательными.

В качестве модели двухатомной молекулы в первом приближении можно принять систему из двух жестко связанных между собой материальных точек. Эта система имеет пять степеней свободы. Три из них являются поступательными и определяют координаты центра масс системы. Две определяют возможные вращения молекулы относительно двух взаимно перпендикулярных осей, каждая из

которых перпендикулярна оси молекулы. Эти степени свободы называются вращательными.

Другой моделью двухатомной молекулы является система двух материальных точек, связанных не жесткой, а упругой связью. В этом случае возникает колебательное движение атомов вдоль оси системы. Такая система имеет шесть степеней свободы: три поступательных, две вращательных и одну колебательную.

В отличие от поступательного и вращательного, колебательное движение связано с наличием как кинетической, так и потенциальной энергии. В механике доказывается, что средняя потенциальная энергия при колебательном движении равна средней кинетической. Поэтому на каждую колебательную степень свободы молекулы приходится в среднем вдвое большая энергия, равная  $kT$ .

Модель молекулы, состоящей из трех и более атомов, обычно представляют в виде системы жестко связанных материальных точек. Эти молекулы имеют шесть степеней свободы<sup>2</sup>: три поступательные и три вращательные.

Согласно положению о равномерном распределении энергии по степеням свободы, средняя энергия  $\langle \varepsilon \rangle$  молекулы может быть рассчитана по формуле

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{i}{2} kT, \quad (4.27)$$

где  $i = i_{\text{пост}} + i_{\text{вр}} + 2i_{\text{кол}}$  – сумма чисел поступательных, вращательных и удвоенного числа колебательных степеней свободы молекулы (число колебательных степеней свободы удваивается в связи с их вдвое большей энергоемкостью).

Тогда внутреннюю энергию 1 моля идеального газа можно записать в виде:

$$U = \langle \varepsilon \rangle N_A = \frac{i}{2} RT. \quad (4.28)$$

Откуда с учетом (4.20) и (4.22) молярные теплоемкости идеального газа могут быть выражены следующим образом:

$$C_V^{\text{мол}} = \frac{dU}{dT} = \frac{i}{2} R, \quad (4.29)$$

$$C_P^{\text{мол}} = C_V^{\text{мол}} + R = \frac{i+2}{2} R. \quad (4.30)$$

---

<sup>2</sup> Исключение составляют так называемые линейные молекулы, атомы которых расположены на одной прямой. Эти молекулы имеют три поступательные и две вращательные степени свободы.

Из формул (4.29), (4.30) следует, что отношение теплоемкостей  $C_P/C_V$  для идеального газа зависит лишь от числа степеней свободы молекул

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{C_P^{\text{мол}}}{C_V^{\text{мол}}} = \frac{i+2}{i}. \quad (4.31)$$

Результаты расчетов  $C_P^{\text{мол}}$ ,  $C_V^{\text{мол}}$  и  $\gamma$  в зависимости от числа атомов в молекулах идеального газа приведены в таблице 4.1.

Таблица 4.1

Молекула	Характер связи между атомами	Число степеней свободы			i	$C_V^{\text{мол}}$ — Дж моль·К	$C_P^{\text{мол}}$ — Дж моль·К	$\gamma$ —
		пост.	вращ.	колеб.				
одноатомная	—	3	—	—	3	$\frac{3}{2}R$	$\frac{5}{2}R$	1,67
двухатомная	жесткая	3	2	—	5	$\frac{5}{2}R$	$\frac{7}{2}R$	1,40
двухатомная	упругая	3	2	1	7	$\frac{7}{2}R$	$\frac{9}{2}R$	1,29
с числом атомов три и более	жесткая	3	3	—	6	3R	4R	1,33

Главным недостатком классической теории является то, что она не дает объяснения температурной зависимости теплоемкости газов. Приближенные значения теплоемкости по классической теории могут быть получены лишь для отдельных температурных интервалов, если считать, что при температурах, близких к комнатной, колебательные степени свободы как бы “заморожены”, а с увеличением температуры колебательные степени свободы постепенно “размораживаются”.

### Классическая теория теплоемкости твердых тел

При подводе теплоты к твердому телу она расходуется на увеличение энергии колебаний атомов, образующих кристаллическую решетку тела. Поскольку атомы твердого тела взаимодействуют друг с другом, их колебания являются связанными между собой. Однако при достаточно высокой температуре можно приближенно считать, что каждый атом колеблется независимо от соседних.

В общем случае колебания атомов около положений равновесия в узлах кристаллической решетки могут происходить в разных направлениях. Но любое колебание всегда можно разложить на три составляющих колебания в трех взаимно перпендикулярных направлениях. Поэтому каждый атом обладает тремя колебательными степенями свободы.

В соответствии с законом равномерного распределения энергии по степеням свободы на каждую колебательную степень свободы атома приходится энергия, равная  $kT$ . Таким образом, на каждый атом в кристаллической решетке приходится в среднем энергия

$$\langle \varepsilon \rangle = 3kT.$$

Тогда внутренняя энергия 1 моля

$$U = 3kTN_A = 3RT. \quad (4.32)$$

Объем твердых тел при нагревании практически не меняется, следовательно,  $\frac{dV}{dT} \rightarrow 0$ , поэтому молярная теплоемкость твердого тела запишется

$$C^{\text{мол}} = C_V^{\text{мол}} = \frac{dU}{dT} = 3R. \quad (4.33)$$

Формула (4.33) составляет содержание закона Дюлонга и Пти, открытого экспериментально в XIX веке.

### ***4.3 Второе начало термодинамики. Тепловые двигатели***

#### **Энтропия**

Первое начало термодинамики не говорит о направленности процессов в системе. Но в изолированной системе процессы не могут идти как угодно. Большинство процессов в природе необратимы. Обратимым называется процесс, который может быть реализован в обратном направлении так, что система будет проходить через ту же последовательность состояний, что и в прямом. При этом во внешней среде не останется никаких изменений. Все остальные процессы являются необратимыми.

В реальности все процессы необратимы (лишь в некоторых случаях мы условно считаем их обратимыми). Так, процесс теплообмена между двумя телами с различной температурой приводит к выравниванию их температур. Этот процесс идет самопроизвольно. Обратный же процесс: нагревание более горячего тела за счет более холодного самопроизвольно происходить не может.

Аналогично самопроизвольно идут процессы перехода механической энергии в тепловую, например, за счет сил сопротивления или трения. Обратный же процесс преобразования тепла в работу без дополнительных затрат энергии идти не будет. Тепловая энергия - это энергия хаотического движения молекул. Механическая энергия - это энергия направленного движения. Самопроизвольно в природе идут процессы, приводящие к увеличению вероятности состояния системы. Эта вероятность определяется числом микроскопических способов осуществления данного макросостояния  $w$ . Ясно, что чем выше степень беспорядка в координатах и скоростях частиц системы, тем больше  $w$ .

Физическая величина, равная

$$S = k \cdot \ln w, \quad (4.34)$$

называется энтропией ( $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К - постоянная Больцмана).

Изолированная система, первоначально находившаяся в состоянии, характеризуемом малой вероятностью, будет стремиться к состоянию, характеризуемому большей вероятностью. Следовательно, энтропия изолированной системы не может убывать.

$$\Delta S \geq 0, \quad (4.35)$$

где знак равенства ставится, если в системе протекают только обратимые процессы. Выражение (4.35) является одной из формулировок *второго начала термодинамики*.

Энтропия системы, как и внутренняя энергия, является функцией состояния, и ее можно выразить через термодинамические характеристики. Так, если в системе протекают только обратимые процессы, то

$$dS = \frac{\delta Q}{T}. \quad (4.36)$$

где  $dS$  - полный дифференциал.

В случае необратимых процессов выражение (4.36) превращается в неравенство

$$dS > \frac{\delta Q}{T}. \quad (4.37)$$

### **Тепловые двигатели**

Тепловым двигателем называется устройство, в котором хаотическая тепловая энергия молекул превращается в упорядоченное механическое движение.

Любой циклический тепловой двигатель (рис.4.3) состоит из трех частей: нагревателя (с температурой  $T_1$ ), рабочего тела и холодильника (с температурой  $T_2$ ). Рабочее тело (газ, пар) при расширении совершает работу, получая от нагревателя с температурой  $T_1$  количество теплоты  $Q_1$ .

При расширении совершается работа против внешних сил и приводится в движение какой-либо механизм. После расширения рабочее тело должно вернуться в исходное состояние, поэтому газ должен быть снова сжат. Чтобы работа сжатия была по величине меньше работы расширения (т.е. работа за цикл была  $A_{ц} > 0$ ) необходимо, чтобы процесс сжатия происходил при меньшей температуре. Для этого нужен холодильник с температурой  $T_2$ , которому отдается количество теплоты  $Q_2$ . В обычных тепловых двигателях холодильником является атмосфера.

Коэффициент полезного действия (к.п.д.) теплового двигателя равен

$$\eta = \frac{A_{ц}}{Q_1}. \quad (4.38)$$

Поскольку в конце цикла газ возвращается в начальное состояние, то изменение внутренней энергии за цикл равно нулю и первое начало термодинамики для цикла запишется

$$Q_1 - |Q_2| = A_{ц}, \quad (4.39)$$

Тогда формулу (4.38) для к.п.д. можно представить в виде

$$\eta = 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1}. \quad (4.40)$$

Выражение (4.40) соответствует еще одной формулировке *второго начала термодинамики*: к.п.д. теплового двигателя всегда меньше единицы. Это означает, что невозможны циклические процессы, единственным результатом которых является совершение работы за счет охлаждения одного тела.

Рассмотрим цикл, состоящий из четырех обратимых процессов: двух изотерм и двух адиабат (рис.4.4), который получил название

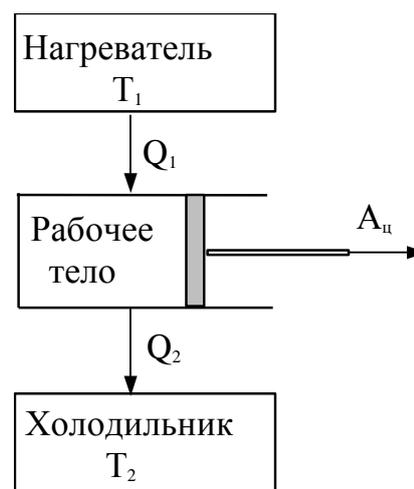


Рис. 4.3

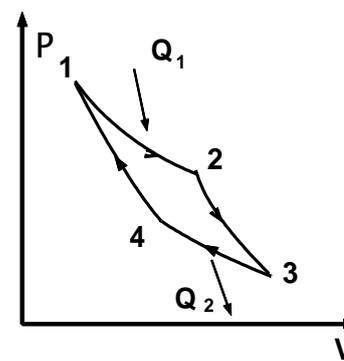


Рис. 4.4

цикла Карно.

Можно показать, что для цикла Карно

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}$$

Тогда согласно формуле (4.40) к.п.д. цикла Карно можно представить в виде

$$\eta_k = 1 - \frac{T_2}{T_1}. \quad (4.41)$$

Полученный результат показывает, что к.п.д. цикла Карно не зависит от рода рабочего тела, а только от температур нагревателя и холодильника. Можно также доказать, что к.п.д. любого теплового двигателя не может быть больше к.п.д. цикла Карно, работающего в том же диапазоне температур нагревателя и холодильника. Этот вывод позволяет использовать формулу (4.41) для оценки эффективности работы тепловых двигателей.

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 33

### Определение универсальной газовой постоянной

Цель работы: изучение процессов в идеальных газах и определение универсальной газовой постоянной  $R$ .

#### Методика измерений

Рассмотрим в определенном объеме  $V$  при одной и той же температуре два состояния идеального газа при двух различных значениях массы  $m_1$  и  $m_2$ . Применяя к каждому из состояний уравнение состояния (4.3), получаем следующее выражение для расчета универсальной газовой постоянной

$$R = \frac{\mu \cdot (P_1 - P_2) \cdot V}{(m_1 - m_2) \cdot T}, \quad (4.42)$$

где  $P_1$  и  $P_2$  - давления газа в состояниях 1 и 2 соответственно.

Следовательно, для нахождения универсальной газовой постоянной надо измерить давление  $P_1$  и температуру  $T$  некоторой массы  $m_1$  газа, заключенной в сосуд известного объема  $V$ . Затем изменить массу газа до значения  $m_2$  в том же объеме  $V$  (путем откачки или накачки газа) и вновь при той же температуре определить давление  $P_2$ . Изменение

массы газа ( $m_1 - m_2$ ) можно определить, воспользовавшись техническими весами.

### Экспериментальная установка

Для определения универсальной газовой постоянной предназначена экспериментальная установка, общий вид которой приведен на рис.4.5.

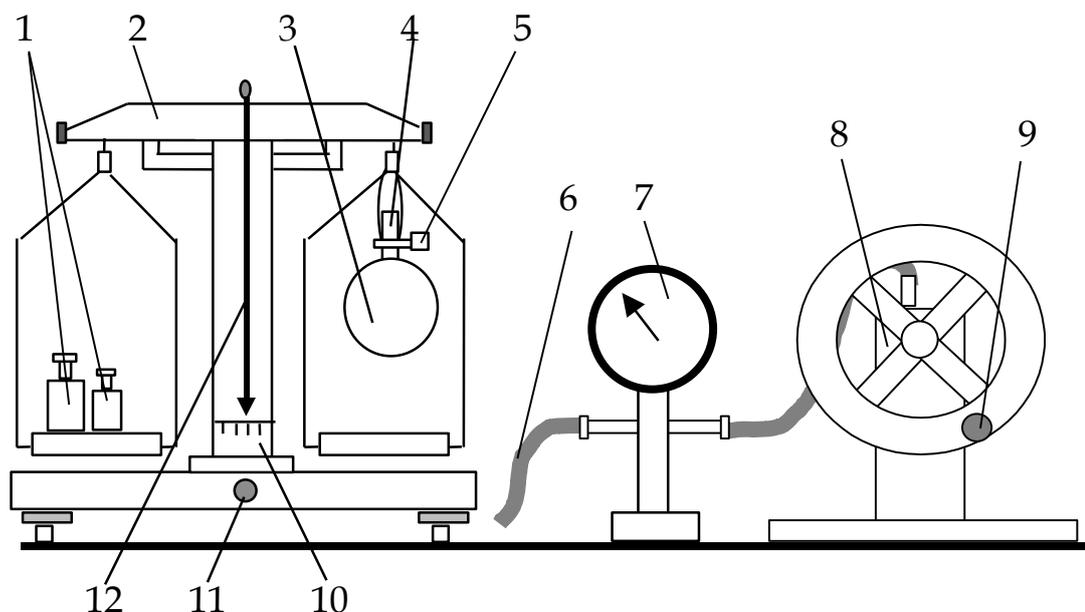


Рис. 4.5

Установка состоит из стеклянной колбы 3, имеющей штуцер 4 с хорошо притертым краном 5. Штуцер колбы можно соединять резиновой трубкой 6 с мановакуумметром 7.

Мановакуумметр 7 служит для измерения разности атмосферного давления и давления газа в колбе. Нулевое деление мановакуумметра соответствует случаю, когда давление в колбе равно атмосферному. Давление газа в колбе понижается вращением рукоятки 9 вакуумного насоса 8.

Массы воздуха и колбы определяются с помощью технических весов. Для этого со стороны одной из чашек весов к коромыслу 2 подвешивается колба 3, а с другой стороны на чашку весов помещаются разновески 1. Коромысло весов освобождается поворотом винта 11. При уравновешенных весах стрелка 12 находится посередине шкалы 10.

### Порядок выполнения работы

1. Открыв кран 5, колбу 3 подвесить к коромыслу 2 со стороны одной из чашек весов и уравновесить коромысло с помощью разновесков 1. Определить суммарную массу ( $m_0 + m_1$ ), где  $m_0$  - масса

пустой колбы,  $m_1$  - масса содержащегося в ней воздуха при атмосферном давлении  $P_1$ . Результаты занести в табл. 4.2.

2. По термометру определить температуру  $T = (t + 273)$  К воздуха в лаборатории.

Таблица 4.2

№ п.п	$(m_0+m_1)$ кг	$(m_0+m_2)$ кг	$(m_1-m_2)$ кг	T К	$(P_1-P_2)$ Па	V м <sup>3</sup>	R $\frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$	$\bar{R}$ $\frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$
1								
2								
3								

3. Колбу 3 соединить резиновой трубкой 6 с входным штуцером мановакуумметра 7. Выходной штуцер мановакуумметра должен быть соединен с насосом 8. Открыв краны на штуцерах мановакуумметра, откачать насосом воздух из колбы до некоторого давления  $P_2$  и быстро закрыть кран выходного штуцера мановакуумметра. Записать измеренную разность давлений в таблицу, учитывая, что  $(P_1 - P_2)$  [Па] равно показанию стрелки мановакуумметра, умноженному на  $10^5$ . Значение  $(P_1 - P_2)$  должно находиться в диапазоне от  $6 \cdot 10^4$  Па до  $9 \cdot 10^4$  Па.

4. На технических весах определить массу  $(m_0 + m_2)$ , где  $m_2$  - масса содержащегося в колбе воздуха после откачки. Разность значений, полученных в п.1 и в данном измерении, равна  $(m_1 - m_2)$ , т.е. разности масс воздуха в колбы при атмосферном давлении и после откачки.

5. Измерения по пп. 1...4, повторить не менее трех раз для значений  $(P_1 - P_2)$  в пределах от  $6 \cdot 10^4$  Па до  $9 \cdot 10^4$  Па.

6. По формуле (4.42) для каждого измерения определить полученное в опыте значение универсальной газовой постоянной R. Рассчитать среднее значение R по результатам опытов.

Молярная масса воздуха равна  $\mu = 0,029$  кг/моль.

### Контрольные вопросы

1. В чем заключается физический смысл универсальной газовой постоянной?

2. Какова размерность универсальной газовой постоянной в системе СИ?

3. Опишите метод, используемый в данной работе для определения значения универсальной газовой постоянной.

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 35

### Определение отношения теплоемкостей воздуха при постоянном давлении и постоянном объеме методом Клемана - Дезорма

Цель работы: изучение процессов в идеальных газах и определение отношения теплоемкостей  $\gamma$ .

#### Методика измерений

Для определения отношения теплоемкостей методом Клемана - Дезорма используется емкость, соединенная с открытым водяным манометром, посредством которого измеряется разность давлений в емкости и в атмосфере.

Если в емкость, накачивать небольшое количество воздуха, то давление в ней будет повышаться и достигнет величины  $P'_1$ , как это показано на  $P$ - $V$  диаграмме (рис.4.6), где по оси абсцисс отложены объемы одного моля воздуха. Повышение давления в емкости при достаточно быстром нагнетании воздуха сопровождается повышением температуры до величины  $T_1$ .

Затем вследствие теплопроводности стенок сосуда воздух в закрытой емкости изохорически охлаждается, и через некоторое время температура станет равной температуре окружающей среды  $T_0$ .

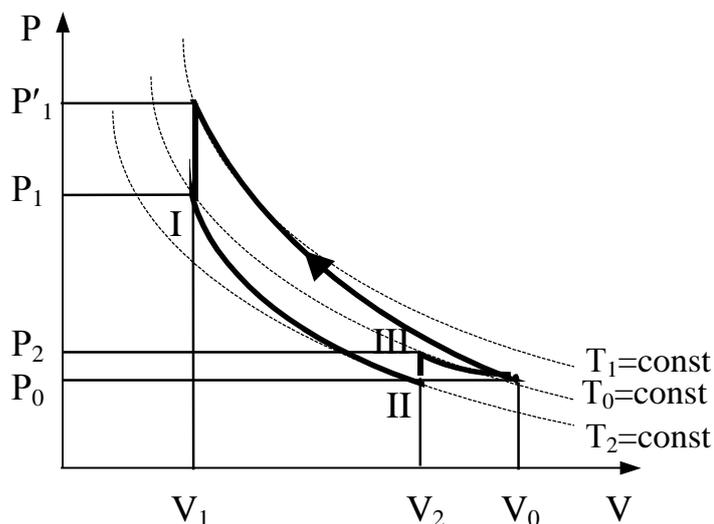


Рис. 4.6

При этом давление в емкости понизится до величины  $P_1$ . Уровни жидкости в манометре перестанут изменяться, и установится разность уровней  $h_1$ . Это состояние воздуха в емкости обозначим через 1, а соответствующие параметры - через  $P_1$ ,  $V_1$ ,  $T_0$ , причем

$$P_1 = P_0 + h_1, \quad (4.43)$$

где  $P_0$  - атмосферное давление во время проведения опыта,  $h_1$  - установившаяся в манометре разность уровней.

Если теперь соединить емкость с атмосферой, то произойдет адиабатическое расширение воздуха. Давление при этом понизится до атмосферного  $P_0$ , молярный объем газа увеличится до величины  $V_2$ , а температура уменьшится до величины  $T_2$ . Таким образом состояние газа II будет характеризоваться параметрами  $P_0, V_2, T_2$ .

Однако вследствие теплопроводности стенок температура воздуха в емкости начнет повышаться изохорически, давление при этом будет увеличиваться. Процесс закончится, когда температура воздуха в емкости станет равной температуре окружающей среды  $T_0$ . При этом давление возрастет до величины

$$P_2 = P_0 + h_2, \quad (4.44)$$

где  $h_2$  - вновь установившаяся в манометре разность уровней.

Таким образом, параметрами состояния III являются  $P_2, V_2, T_0$ .

В результате опыта будем иметь:

Состояние I:  $P_1, V_1, T_0$ .

Состояние II:  $P_0, V_2, T_2$ .

Состояние III:  $P_2, V_2, T_0$ .

Поскольку переход из состояния I в состояние II происходит адиабатически, то здесь справедливо уравнение Пуассона (4.26), которое с учетом уравнения состояния идеального газа (4.4) можно представить в виде

$$\frac{T^\gamma}{P^{\gamma-1}} = \text{const.}$$

Следовательно

$$\frac{T_0^\gamma}{P_1^{\gamma-1}} = \frac{T_2^\gamma}{P_0^{\gamma-1}}. \quad (4.45)$$

Переход из состояния II в состояние III происходит без изменения объема, т.е. изохорически, поэтому справедливо уравнение (4.5):

$$\frac{P_0}{T_2} = \frac{P_2}{T_0}. \quad (4.46)$$

Подставив в уравнения (4.45) и (4.46) величины  $P_1$  и  $P_2$  из формул (4.43) и (4.44), получим

$$\left( \frac{P_0 + h_1}{P_0} \right)^{\gamma-1} = \left( \frac{T_0}{T_2} \right)^\gamma, \quad \text{или} \quad \frac{P_0 + h_2}{P_0} = \frac{T_0}{T_2}.$$

Откуда

$$\left(\frac{P_0 + h_1}{P_0}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{P_0 + h_2}{P_0}\right)^{\gamma}.$$

Разлагая обе части уравнения в ряд и считая, что  $h_1/P_0 \ll 1$  и  $h_2/P_0 \ll 1$ , можно записать, ограничиваясь лишь двумя членами рядов:

$$1 + (\gamma - 1) \frac{h_1}{P_0} = 1 + \gamma \frac{h_2}{P_0}.$$

Тогда расчетная формула для определения  $\gamma$  примет вид

$$\gamma = \frac{h_1}{h_1 - h_2}. \quad (4.47)$$

Для определения отношения теплоемкостей воздуха  $\gamma = C_p/C_v$  используется одна из экспериментальных установок: с автоматическим (№ 1, 2) или ручным (№ 3) нагнетанием воздуха.

### Экспериментальная установка № 1 с автоматическим нагнетанием воздуха

Общий вид установки № 1 с автоматическим нагнетанием воздуха приведен на рис.4.7.

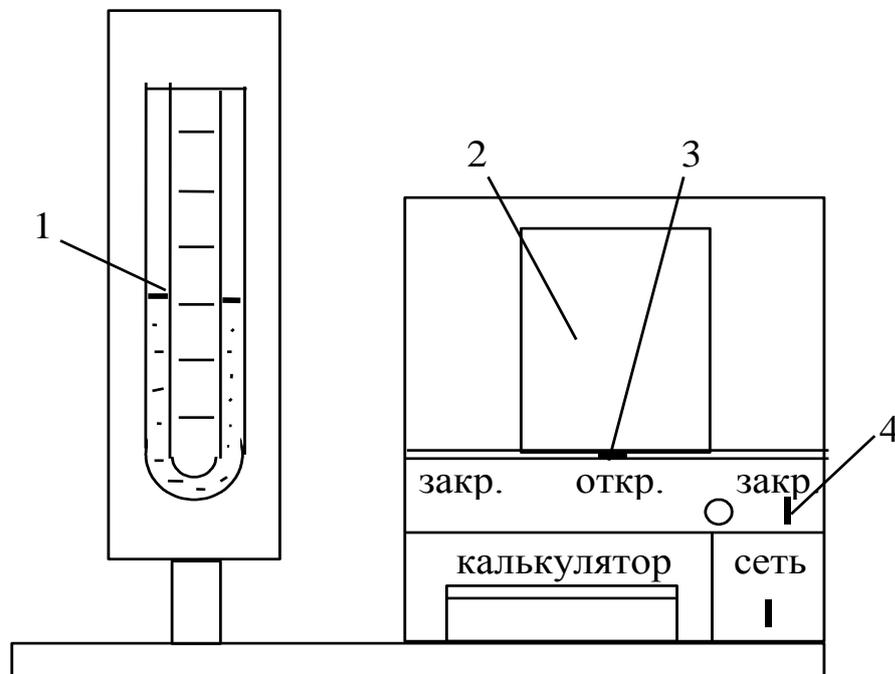


Рис. 4.7

Установка состоит из емкости 2, соединенной с открытым водяным манометром 1. Нагнетание воздуха в емкость производится

микрокомпрессором, вмонтированным в установку. Включение микрокомпрессора осуществляется тумблером 4. Рычаг 3 позволяет соединять емкость 2 с микрокомпрессором (положение “Закрыто”) или с атмосферой (положение “Открыто”).

### Порядок выполнения работы

1. Включить установку тумблером “Сеть”.
2. Установить рычаг 3 в правое положение “Закрыто” и включить микрокомпрессор тумблером 4. Когда разность уровней жидкости в манометре 1 достигнет (150...250) мм вод. ст., отключить микрокомпрессор.
3. Выждать, пока температура в емкости не станет равной температуре окружающей среды  $T_0$  и не установится давление  $P_1 = P_0 + h_1$ , при этом разность уровней жидкости в манометре перестанет изменяться. Определить установившуюся разность уровней  $h_1$  в коленах манометра и полученное значение занести в табл.4.3.

Таблица 4.3

№ п.п	$h_1$ мм вод. ст.	$h_2$ мм. вод. ст.	$\gamma$ —	$\bar{\gamma}$ —
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				

4. Кратковременно соединить емкость 2 с атмосферой при помощи рычага 3, быстро переведя его в левое положение “Закрыто”. При этом произойдет адиабатическое расширение воздуха.

5. Выждать, пока уровни воды в коленах манометра не перестанут изменяться, после чего давление окончательно установится. Занести в табл.4.3 найденную разность уровней жидкости  $h_2$ .

6. Опыт повторить не менее десяти раз, изменяя величину  $h_1$ .

7. В каждом опыте по формуле (4.47) определить отношение теплоемкостей  $\gamma$ , а затем - среднее значение  $\gamma$ .

8. Оценить погрешность результатов измерений.

9. Выключить установку тумблером “Сеть”.

## Экспериментальная установка № 2 с автоматическим нагнетанием воздуха

Общий вид установки № 2 с автоматическим нагнетанием воздуха приведен на рис.4.8.

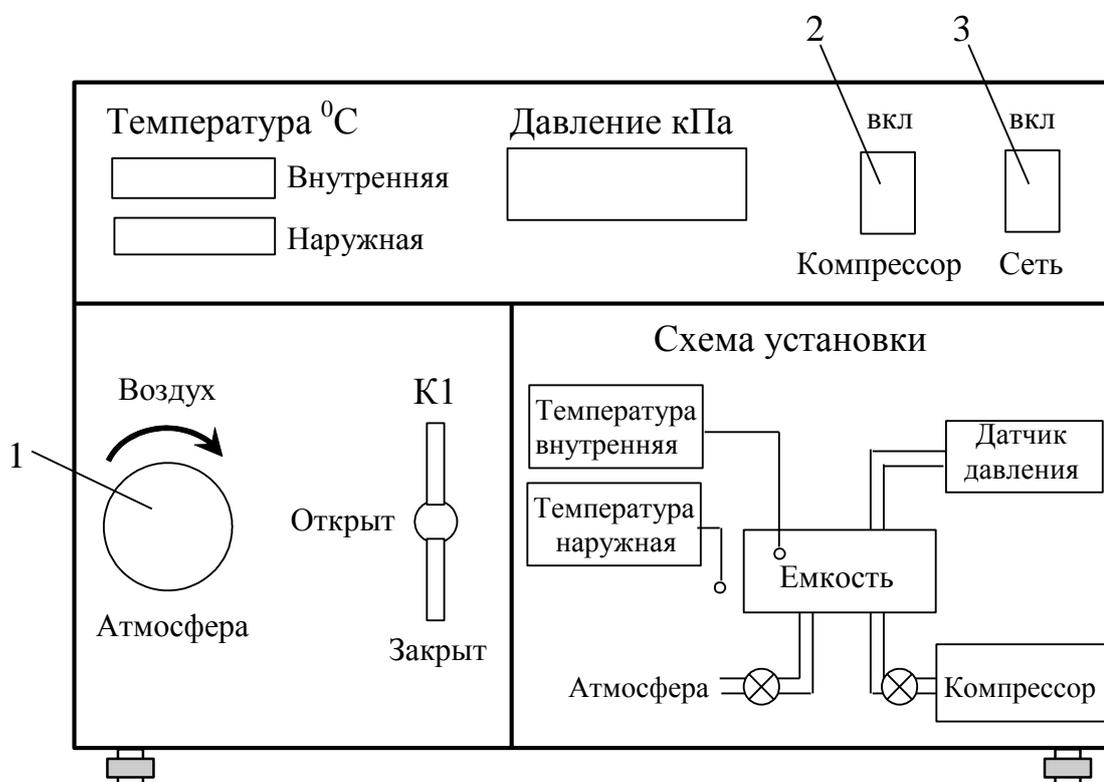


Рис. 4.8

Установка состоит из емкости, соединенной с датчиком давления, который измеряет избыточное\* давление в емкости  $h_1$  и  $h_2$ . Нагнетание воздуха в емкость производится компрессором, вмонтированным в установку. Кран K1 позволяет соединять емкость с компрессором (положение «открыт»). При вращении регулятора 1 (до щелчка) емкость кратковременно соединяется с атмосферой.

### Порядок выполнения работы

1. Включить установку тумблером «Сеть».
2. Перевести кран K1 в положение «открыт».
3. Включить тумблером 2 компрессор и накачать в рабочую емкость некоторое количество воздуха.
4. Перевести кран K1 в положение «закрыт» и выключить тумблером 2 компрессор.

\* Избыточное давление есть разность давления в емкости  $P$  и атмосферного давления  $P_0$ .

5. Выждать, пока температура в емкости не станет равной температуре окружающей среды  $T_0$  и не установится давление  $P_1 = P_0 + h_1$ , при этом показания датчика давления перестанут изменяться. Записать избыточное давление в емкости  $h_1$  в табл.4.4

Таблица 4.4

№ п.п	$h_1$ кПа	$h_2$ кПа	$\gamma$ —	$\bar{\gamma}$ —
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				

6. Кратковременно соединить рабочую емкость с атмосферой, повернув регулятор 1 по часовой стрелке до щелчка. При этом произойдет адиабатическое расширение воздуха.

7. Выждать, пока показания датчика давления не перестанут изменяться, т.е. давление в емкости окончательно установится. Занести в табл.4.4. значение избыточного давления  $h_2$ .

8. Опыт повторить не менее десяти раз, изменяя величину давления  $h_1$ , т.е. накачивая в емкость разное количество воздуха.

9. В каждом опыте по формуле (4.47) определить отношение теплоемкостей  $\gamma$ , а затем - среднее значение  $\gamma$ .

10. Оценить погрешность результатов измерений.

11. Выключить установку тумблером 3 «Сеть».

### **Экспериментальная установка № 3 с ручным нагнетанием воздуха**

Общий вид установки с ручным нагнетанием воздуха приведен на рис.4.9.

Установка состоит из стеклянного баллона 2, соединенного с открытым водяным манометром 1. Нагнетание воздуха в емкость производится насосом 5. Трехходовой кран 3 позволяет соединять стеклянный баллон 2 с насосом или с атмосферой.

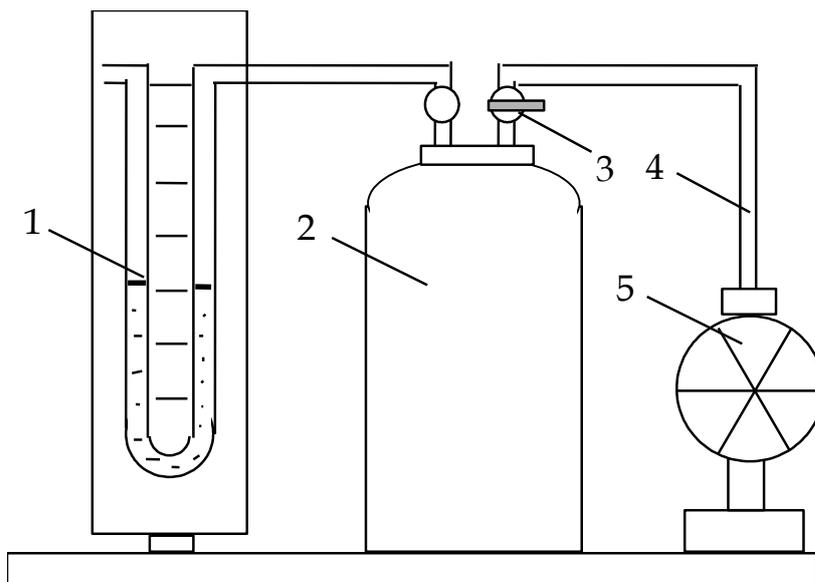


Рис. 4.9

### Порядок выполнения работы

1. Повернуть кран 3 так, чтобы соединить баллон 2 с насосом 5 через трубку 4.

2. Насосом осторожно нагнетать воздух в баллон 2, пока разность уровней жидкости в манометре не достигнет (150...250) мм вод. ст.. После этого перекрыть кран 3.

3. Выждать, пока температура в баллоне не станет равной температуре окружающей среды  $T_0$  и не установится давление  $P_1 = P_0 + h_1$ , при этом разность уровней жидкости в манометре перестанет изменяться. Определить установившуюся разность уровней  $h_1$  в коленах манометра и полученное значение занести в табл.4.5.

Таблица 4.5

№ п.п	$h_1$ мм вод. ст.	$h_2$ мм. вод. ст.	$\gamma$ —	$\bar{\gamma}$ —
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				

4. Кратковременно соединить баллон 2 с атмосферой и в момент, когда уровни в трубках манометра совпадут (при этом давление в баллоне станет равным атмосферному), быстро закрыть трехходовой кран 3. При этом произойдет адиабатическое расширение воздуха.

5. Выждать, пока уровни воды в коленах манометра не перестанут изменяться, после чего давление окончательно установится. Занести в табл.4.4 найденную разность уровней жидкости  $h_2$ .

6. Опыт повторить не менее десяти раз, изменяя величину  $h_1$ .

7. В каждом опыте по формуле (4.47) определить отношение теплоемкостей  $\gamma$ , а затем - среднее значение  $\gamma$ .

8. Оценить погрешность результатов измерений.

### Контрольные вопросы

1. В чем заключается сущность описанного в работе метода определения отношения теплоемкостей воздуха при постоянном давлении и постоянном объеме?

2. Опишите рабочий цикл установки по P-V диаграмме.

3. Покажите, что отношение теплоемкостей  $\gamma = C_p/C_v$  зависит лишь от числа степеней свободы молекул газа. Рассчитайте отношение теплоемкостей для воздуха.

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 36(к)

### Адиабатический процесс

Цель работы: Исследование с помощью компьютерной модели основных термодинамических параметров газа в адиабатическом процессе. Экспериментальное определение показателя адиабаты, а также количества степеней свободы молекул газа.

#### Методика измерений

Процесс, проходящий без теплообмена с внешней средой, называется адиабатическим. В данной работе исследуется адиабатическое расширение и сжатие газа в теплоизолированном сосуде.

Рассмотрим зависимость давления и температуры газа от его объема при адиабатическом процессе. Как было получено в разд. 4.1, связь давления и объема газа определяется уравнением Пуассона (4.26)

$$P \cdot V^\gamma = \text{const}, \quad (4.48)$$

где  $\gamma = C_p/C_v$  – показатель адиабаты, значение которого зависит от числа степеней свободы молекулы газа (4.31):

$$\gamma = \frac{i + 2}{i}. \quad (4.49)$$

Прологарифмируем выражение (4.48):

$$\ln P + \gamma \ln V = \ln(\text{const})$$

или

$$\ln P = k - \gamma \ln V, \quad (4.50)$$

где  $k = \ln(\text{const})$ .

Уравнение (4.50) показывает, что зависимость логарифма давления газа от логарифма его объема  $\ln P = f(\ln V)$  является линейной. Построив по данным эксперимента эту зависимость, можно по наклону прямой рассчитать показатель адиабаты  $\gamma$ , а также определить из (4.49) число степеней свободы молекулы.

Из уравнения Пуассона (4.48) и уравнения состояния идеального газа (4.4) следует, что температура газа и его объем в любых двух точках адиабатического процесса связаны соотношением (4.25)

$$T_1 \cdot V_1^{\gamma-1} = T_2 \cdot V_2^{\gamma-1}. \quad (4.51)$$

В данной работе эта зависимость подтверждается экспериментально.

### Порядок выполнения работы

Запустить программу, подведя маркер мыши под значок "Открытая

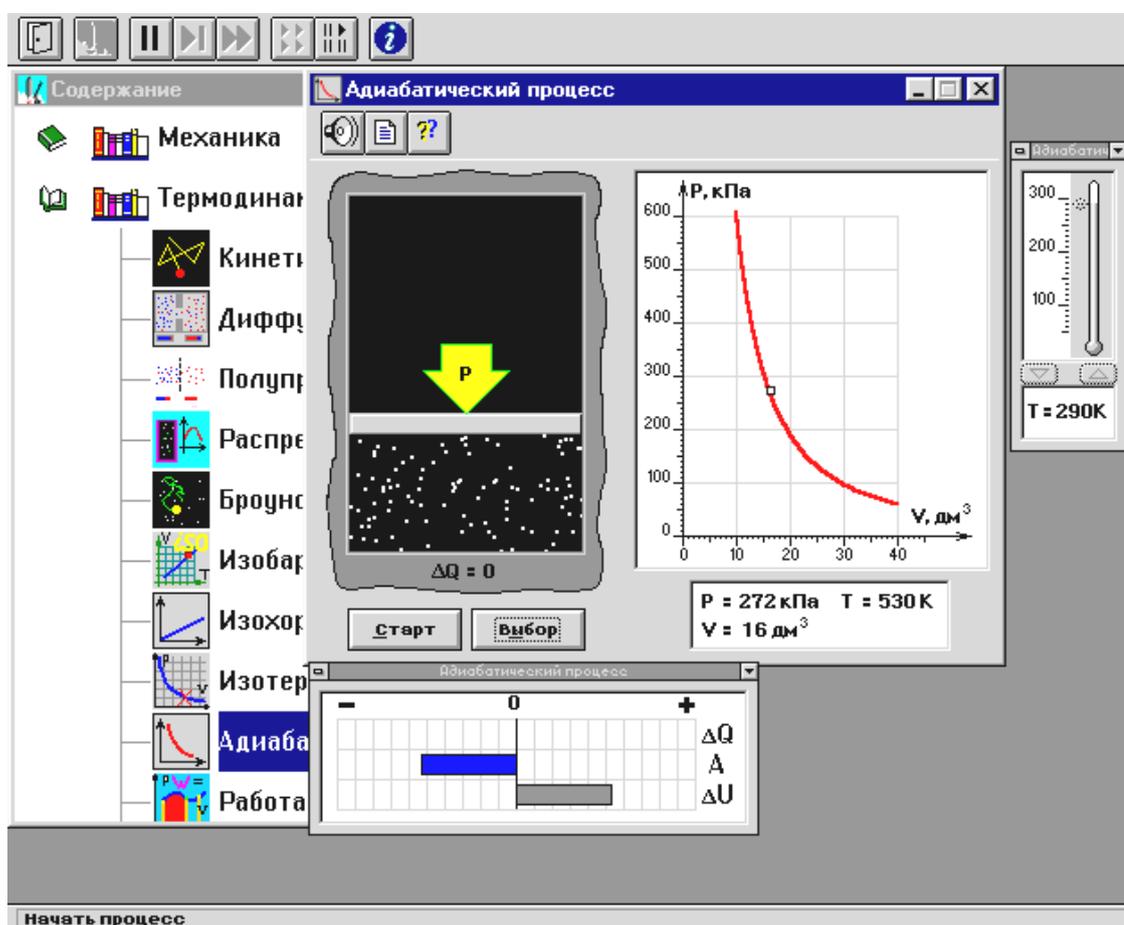


Рис. 4.10

физика.1.1" на рабочем столе компьютера и дважды щёлкнув левой кнопкой мыши. Выбрать раздел «Термодинамика и молекулярная физика», затем - «Адиабатический процесс» (рис.4.10).

Рассмотреть внимательно изображение на экране монитора компьютера. Найти рисунок элемента, в котором реализуется адиабатический процесс, и обратить внимание на его теплоизоляцию. Ознакомиться с графиком в правой части изображения.

Нажать мышью кнопку «СТАРТ» и наблюдать на экране перемещение поршня на модели и перемещение «крестика» по красной кривой теоретической адиабаты. Остановка процесса осуществляется нажатием кнопки «СТОП». Последующий запуск процесса производится нажатием кнопки «СТАРТ».

Зарисовать рабочий элемент и примерный вид графика в свой конспект лабораторной работы. Дописать, если необходимо, нужные формулы (кнопка с изображением страницы служит для вызова теоретических сведений).

1. Нажать кнопку «ВЫБОР». Подвести маркер мыши к кнопкам регулятора начальной температуры, находящимся под градусником. Установить первое из полученных вашей бригадой от преподавателя значение начальной температуры  $T_{\text{нач}}$  газа. Записать в табл.4.5 значения давления  $P_1$  и температуры  $T_1$  газа при начальном объеме  $V_{\text{нач}} = 40 \text{ дм}^3$ .

2. Произвести измерения при адиабатическом сжатии газа. Для этого нажать мышью кнопку «СТАРТ». Останавливать процесс нажатием кнопки «СТОП», когда крестик на теоретической адиабате (красная кривая) будет находиться вблизи следующих значений объема:  $V = 35, 30, 25, 20$  и  $15 \text{ дм}^3$ . Записывать при остановке значения давления  $P_1$  и температуры  $T_1$ , в таблицу 4.6.

Таблица 4.6

$$T_{\text{нач.}} = \text{___} \text{ K}$$

№ п.п.	V дм <sup>3</sup>	ln V –	P <sub>1</sub> кПа	P <sub>2</sub> кПа	$\bar{P}$ кПа	ln $\bar{P}$ –	T <sub>1</sub> К	T <sub>2</sub> К	$\bar{T}$ К	T <sub>теор</sub> К
1	15									
2	20									
3	25									
4	30									
5	35									
6	40									

Если остановить процесс вовремя не удаётся, перейти в пошаговое выполнение: для этого надо нажать кнопки «||» и «Старт» и, нажимая кнопку «▶|», выполнить процесс по шагам.

3. Повторить измерения по п.2 для адиабатического расширения газа (т.е. изменяя объем от 15 дм<sup>3</sup> до 40 дм<sup>3</sup>), записывая в табл.4.5 значения давления  $P_2$  и температуры  $T_2$ .

4. Для каждой пары измерений при одном и том же объеме газа рассчитать среднеарифметические значения давления

$$\bar{P} = \frac{P_1 + P_2}{2}. \quad (4.52)$$

5. Подсчитать значения натуральных логарифмов от объема  $\ln V$  и среднего давления  $\ln \bar{P}$ . Результаты записать в табл.4.5.

6. Установить второе значение начальной температуры  $T_{\text{нач}}$  газа из данных для вашей бригады, и повторить измерения по п.п. 2–5, записывая результаты в таблицу 4.7.

Таблица 4.7

$T_{\text{нач.}} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ К}$

№ п.п.	V дм <sup>3</sup>	ln V –	P <sub>1</sub> кПа	P <sub>2</sub> кПа	$\bar{P}$ кПа	ln $\bar{P}$ –	T <sub>1</sub> К	T <sub>2</sub> К	$\bar{T}$ К	T <sub>теор</sub> К
1	15									
2	20									
3	25									
4	30									
5	35									
6	40									

7. По данным двух таблиц построить графики зависимости натурального логарифма давления от натурального логарифма объема  $\ln \bar{P} = f(\ln V)$ .

8. На каждом графике выбрать две произвольные точки А и В и согласно (4.50) определить показатель адиабаты как угловой коэффициент наклона полученного графика по формуле

$$\gamma = \frac{\ln P_A - \ln P_B}{\ln V_B - \ln V_A}. \quad (4.53)$$

9. Рассчитать среднеарифметическое значение показателя адиабаты  $\bar{\gamma}$  по результатам двух графиков.

10. Из формулы (4.49) определить экспериментально полученное число степеней свободы молекулы исследуемого газа  $i_{\text{эксп}}$ :

$$i_{\text{эксп}} = \frac{2}{\bar{\gamma} - 1}. \quad (4.54)$$

11. По табл.4.1 определить теоретическое значение числа степеней свободы  $i$  (ближайшее к экспериментально полученному) и число атомов молекулы исследуемого газа.

12. Вычислить относительную погрешность измерения по формуле:

$$\delta = \frac{i - i_{\text{эксп}}}{i} \cdot 100\% . \quad (4.55)$$

13. В каждой таблице рассчитать среднеарифметические значения температуры для одного и того же объема газа

$$\bar{T} = \frac{T_1 + T_2}{2} . \quad (4.56)$$

14. Согласно формуле (4.51) определить теоретические значения температуры  $T_{\text{теор}}$  для каждого значения объема газа

$$T_{\text{теор}} = T_{\text{нач}} \left( \frac{V_{\text{нач}}}{V} \right)^{\gamma-1} , \quad (4.57)$$

где  $V_{\text{нач}} = 40 \text{ дм}^3$ .

15. По данным двух таблиц построить графики зависимости изменения температуры газа от его объема  $\bar{T} = f(V)$  и  $T_{\text{теор}} = f(V)$  при адиабатическом процессе. Оценить наибольшую относительную погрешность измерений температуры

$$\delta = \frac{T_{\text{теор}} - \bar{T}}{T_{\text{теор}}} \cdot 100\% . \quad (4.58)$$

16. По всем построенным в лабораторной работе графикам провести анализ результатов и сделать выводы.

### Контрольные вопросы

1. В чем заключается методика экспериментального определения показателя адиабаты газа в данной работе?

2. Как связан показатель адиабаты с числом степеней свободы молекулы идеального газа? Почему данную формулу нельзя применять для смеси газов?

3. Подобрать распространенный газ, молекулы которого состоят из такого же числа атомов, что и в эксперименте.

4. Как изменяется температура газа а) при его адиабатическом расширении, б) при адиабатическом сжатии?

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 43

### Определение отношения теплоемкостей воздуха при постоянном давлении и постоянном объеме методом интерференции

Цель работы: определение отношения теплоемкостей  $\gamma = C_p/C_v$  на основе процесса распространения звуковой волны в газе и измерения скорости звука методом интерференции.

#### Методика измерений

Упругими волнами называются механические возмущения (деформации), распространяющиеся в упругой среде. Звуковыми, или акустическими, волнами называются упругие волны малой интенсивности. Звуковые волны, способные вызвать звуковые ощущения, воздействующие на органы слуха человека, имеют частоты в пределах от 16 до 20000 Гц.

Рассмотрим распространение звуковой волны в газе. Как известно, выражение для скорости продольных упругих волн в сплошной среде имеет вид

$$v = \sqrt{\frac{k}{\rho}}, \quad (4.59)$$

где  $k$  - модуль объемной упругости\*,  $\rho$  - плотность невозмущенной среды.

Звуковая волна представляет собой перемещающуюся в пространстве последовательность чередующихся областей сжатия и разрежения газа. Сжатия и разрежения сменяют друг друга настолько быстро, что теплообмен между слоями газа, имеющими разные температуры, не успевает произойти. Поэтому процесс распространения звуковой волны в газе можно считать адиабатическим.

Выразим модуль объемной упругости  $k$  через добавочное давление  $\Delta P$ , вызывающее сжатие газа, и относительную объемную деформацию  $\Delta V/V$ :

$$k = \frac{\Delta P}{\Delta V/V}.$$

Полагая изменения давления  $dP$  и объема  $dV$  бесконечно малыми, можно записать

$$k = -\frac{dP}{dV/V}, \quad (4.60)$$

---

\* Модуль объемной упругости  $k$  аналогичен модулю продольной упругости (модулю Юнга), который характеризует одномерные деформации.

где знак минус означает, что увеличению давления соответствует уменьшение объема.

Дифференцируя уравнение Пуассона (4.26), описывающее адиабатический процесс в газе, получаем

$$V^\gamma dP + \gamma P V^{\gamma-1} dV = 0.$$

Откуда

$$\frac{dP}{dV/V} = -\gamma P. \quad (4.61)$$

Решив совместно (4.61) и (4.60), найдем

$$k = \gamma P. \quad (4.62)$$

Определяя плотность газа из уравнения состояния (4.3)

$$\rho = \frac{P\mu}{RT}, \quad (4.63)$$

и подставляя (4.62) и (4.63) в (4.59), получаем формулу Лапласа для расчета скорости звука в газе

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}}, \quad (4.64)$$

из которой следует

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{v^2 \mu}{RT}. \quad (4.65)$$

Таким образом, для определения отношения теплоемкостей газа  $\gamma$  достаточно измерить его температуру и скорость распространения звука в нем.

В данной работе измерение скорости звука в воздухе производится методом интерференции. С этой целью звуковая волна от источника колебаний разделяется на два звуковых потока, которые затем соединяются друг с другом. Волны как бы исходят от двух когерентных источников, и при их наложении будет наблюдаться явление интерференции.

Изменяя длину пути одного из звуковых потоков, тем самым можно изменять разность хода двух волн и, следовательно, интенсивность результирующей волны. Два соседних минимума (или максимума) при интерференции соответствуют изменению разности хода на длину волны  $\lambda$ . Измерив это расстояние, скорость звука можно определить по формуле

$$v = \lambda f, \quad (4.66)$$

где  $f$  - частота колебаний.

### Экспериментальная установка

Для определения отношения теплоемкостей  $\gamma$  методом интерференции предназначена экспериментальная установка, общий вид которой приведен на рис.4.11.

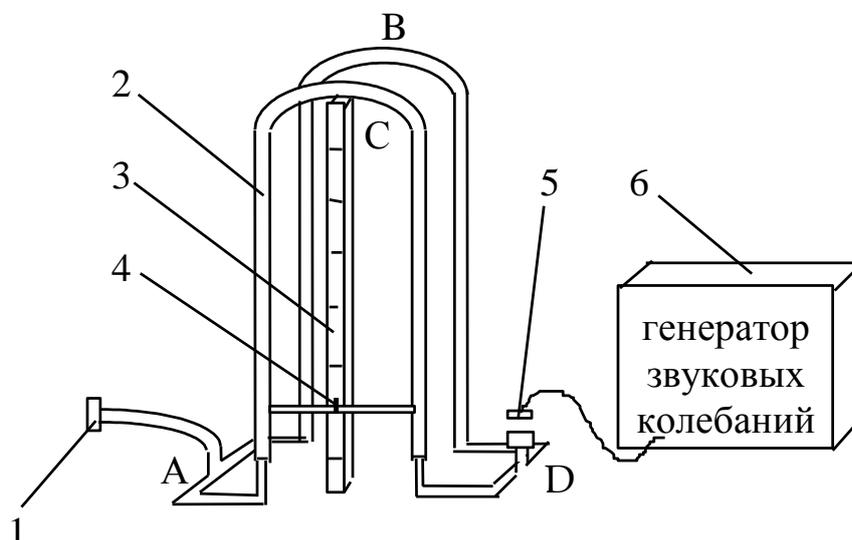


Рис. 4.11

Установка состоит из генератора звуковых колебаний 6 и прибора для измерения скорости звука акустическим методом. Звуковые колебания в приборе возбуждаются телефоном 5 и улавливаются слуховой трубкой 1.

Прибор имеет две коленчатые трубки: ABD постоянной длины и ACD переменной длины (ее длину можно изменять перемещением колена 2). Удлинение колена определяется по шкале 3. Разность хода двух волн равна удвоенному удлинению  $\Delta L$  колена 2, определяемому по шкале 3.

### Порядок выполнения работы

1. Подключить трубку телефона 5 к генератору звуковых колебаний 6 и разместить ее в соответствующем гнезде прибора (рис.4.10).

2. Включить генератор тумблером “Сеть” и установить частоту колебаний  $f = 1500$  Гц.

3. Услышав звук в слуховой трубке 1, медленно перемещать подвижное колено 2 прибора. Определить показания  $L$  по шкале 3, соответствующие положению указателя 4 при всех минимумах звука. Результаты измерений занести в табл.4.8.

4. Рассчитать расстояния  $\Delta L$  между всеми последовательными положениями указателя 4:

$$\Delta L = L_{k+1} - L_k,$$

где  $k$  - номер минимума звука. Результаты записать в табл.4.8.

Таблица 4.8

№ п.п	$f$ Гц	$L$ м	$\Delta L$ м	$\overline{\Delta L}$ м	$T$ К	$v$ м/с	$\gamma$ –	$\overline{\gamma}$ –
1								
2								
3								

5. Определить среднее значение  $\overline{\Delta L}$  для заданной частоты колебаний.

6. Измерения по п.п 3...5 повторить для трех значений частоты колебаний  $f$  в диапазоне, равном (1500 - 6000) Гц.

7. Определить для каждого значения частоты колебаний скорость звука по формуле (4.66), учитывая, что  $\lambda = 2\overline{\Delta L}$ .

8. Определить температуру  $T$  в помещении лаборатории.

9. Для каждого значения частоты колебаний по формуле (4.65) рассчитать отношение теплоемкостей воздуха  $\gamma$ , учитывая, что молярная масса воздуха  $\mu = 29 \cdot 10^{-3}$  кг/моль.

10. Найти среднее значение  $\overline{\gamma}$ .

11. Оценить погрешность результатов измерений.

12. Выключить установку тумблером “Сеть”.

### Контрольные вопросы

1. Почему процесс распространения звуковой волны является адиабатическим?

2. Для чего необходимо перемещать колено прибора?

3. Опишите методику измерения отношения теплоемкостей  $\gamma$  методом интерференции звука.

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 44

### Определение отношения теплоемкостей воздуха при постоянном давлении и постоянном объеме резонансным методом

Цель работы: определение отношения теплоемкостей  $\gamma = C_p/C_v$  на основе измерения резонансным методом скорости распространения звуковой волны при различных температурах воздуха.

#### Методика измерений

Рассмотрим звуковую волну, распространяющуюся в газе вдоль закрытого канала. В предположении, что процесс распространения волны является адиабатическим, выражение для определения скорости звука в газе (формула Лапласа (4.64)) имеет вид

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}}.$$

Вывод этой формулы приведен в описании лабораторной работы 43. Из формулы Лапласа следует

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{v^2 \mu}{RT}. \quad (4.67)$$

Таким образом, для определения отношения теплоемкостей газа  $\gamma$  достаточно измерить его температуру и скорость распространения звука в нем.

Скорость звука при заданной температуре газа может быть найдена резонансным методом. При распространении волны вдоль закрытого канала она многократно отражается от торцов. Звуковые колебания в канале являются наложением всех отраженных волн и достаточно сложны. Картина упрощается, если длина канала равна целому числу полуволен:

$$L = \frac{n\lambda}{2}, \quad (4.68)$$

где  $n$  - любое целое число,  $\lambda$  - длина волны.

Если условие (4.68) выполнено, то волна, отраженная от торца канала, вернувшись к его началу и вновь отраженная, совпадает по фазе с падающей волной. Совпадающие по фазе волны усиливают друг друга. Амплитуда звуковых колебаний при этом резко возрастает - наступает резонанс.

При звуковых колебаниях слои газа, прилегающие к торцам канала, не испытывают смещения. В этих местах образуются узлы смещения.

Они повторяются по всей длине канала через  $\lambda/2$ . Между узлами находятся максимумы смещения (пучности).

Скорость звука  $v$  связана с частотой колебаний  $f$  и длиной волны  $\lambda$  соотношением

$$v = \lambda f. \quad (4.69)$$

Подставляя (4.69) в (4.68), получаем линейную зависимость резонансной частоты от номера резонанса

$$n \cdot v = 2L \cdot f_p, \quad (4.70)$$

где  $f_p$  - резонансная частота.

Зависимость (4.70) может быть проверена экспериментально. Изменяя частоту колебаний при постоянной длине канала, строят график зависимости резонансной частоты  $f_p$  от номера резонанса  $n$ . Для двух достаточно удаленных точек А и Б на графике определяют угловой коэффициент  $k$  наклона прямой к оси абсцисс

$$k = \frac{f_{pB} - f_{pA}}{n_B - n_A}.$$

Тогда скорость звука можно рассчитать по формуле:

$$v = 2kL. \quad (4.71)$$

### Экспериментальная установка

Для определения отношения теплоемкостей  $\gamma$  по скорости звука предназначена экспериментальная установка, общий вид которой приведен на рис.4.12.

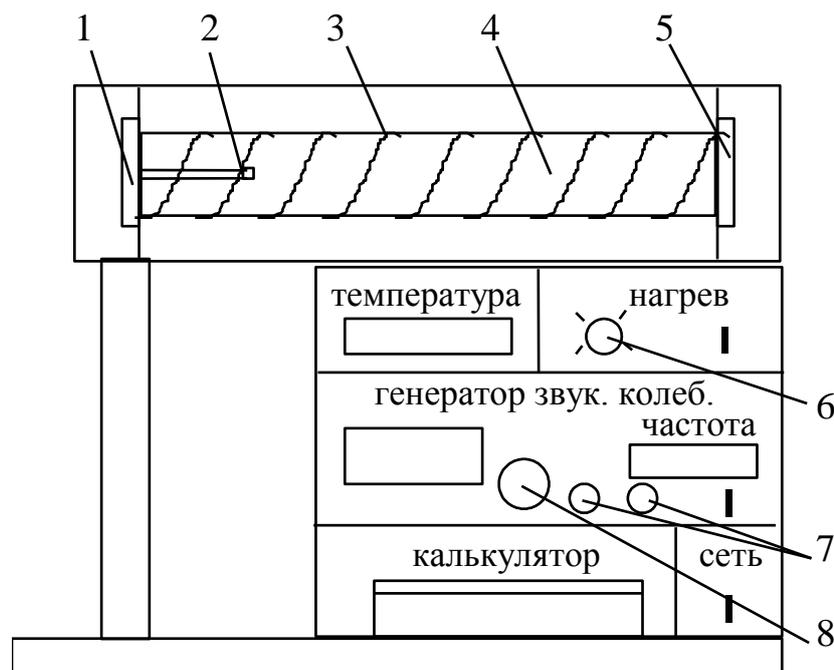


Рис. 4.12

Рабочий элемент установки представляет собой теплоизолированную трубу 4 постоянной длины. Температура воздуха в трубе изменяется с помощью электронагревателя (на трубу навита спираль 3), мощность которого устанавливается регулятором 6. Температура воздуха измеряется полупроводниковым термометром 2 и регистрируется на цифровом индикаторе.

Звуковые колебания в трубе возбуждаются телефоном 1 и улавливаются микрофоном 5. Мембрана телефона приводится в движение переменным током звуковой частоты, в качестве источника переменной ЭДС используется генератор звуковых колебаний, размещенный в блоке приборов установки. Частота колебаний, задаваемых звуковым генератором, регулируется ручками 7 “Грубо” и “Плавно” и регистрируется на цифровом индикаторе.

Интенсивность возникающего в микрофоне сигнала фиксируется миллиамперметром, чувствительность которого регулируется ручкой “Усиление”. Пиковые значения тока, зарегистрированные миллиамперметром при плавном изменении частоты колебаний, соответствуют условию резонанса в канале.

Длина рабочей трубы  $L$  приведена на лицевой панели установки.

### Порядок выполнения работы

1. Включить установку тумблером “Сеть”.
2. Ручки 7 “Грубо” и “Точно” установить в крайнее левое положение. Ручкой 8 “Усиление” отрегулировать чувствительность миллиамперметра (стрелка должна быть примерно посередине шкалы).
3. Плавно увеличивая частоту колебаний, задаваемых звуковым генератором, с помощью ручек 7 “Грубо” и “Точно”, определить частоту 1-го резонанса по максимальному отклонению стрелки на шкале миллиамперметра (регулировку частоты следует производить достаточно медленно в связи с существенной инерционностью частотомера). Результат измерений занести в табл.4.9.
4. Постепенно увеличивая чувствительность миллиамперметра ручкой 8 “Усиление”, получить частоту для 2 - 7 резонансов. Убедиться в повторяемости результатов, производя измерения при уменьшении частоты. Результаты измерений занести в табл.4.9.
5. Включить тумблером электрический нагреватель и установить регулятор мощности 6 в положение “2” или ”3”. Добиться стабилизации температуры воздуха в трубе  $t_2 = (40 - 45) ^\circ\text{C}$  и произвести измерения по п.п 2...4.
6. Переключить регулятор мощности 6 в положение “4” или “5”, добиться стабилизации температуры воздуха в трубе  $t_3 = (55 - 60) ^\circ\text{C}$  и повторить измерения по п.п 2...4.

Таблица 4.9

Номер резонанса	$t_{1 \text{ комн}} = \text{---}^\circ\text{C}$			$t_2 = \text{---}^\circ\text{C}$			$t_3 = \text{---}^\circ\text{C}$		
	$f_p$ Гц	$v$ м/с	$\gamma$ –	$f_p$ Гц	$v$ м/с	$\gamma$ –	$f_p$ Гц	$v$ м/с	$\gamma$ –
1									
2									
3									
4									
5									
6									
7									

7. По полученным результатам построить график, откладывая по оси абсцисс номер резонанса  $n$ , а по оси ординат - резонансную частоту  $f_p$ . По нанесенным опытным точкам провести усредненные прямые и определить угловые коэффициенты наклона прямых к оси абсцисс.

8. Для каждого значения температуры воздуха в трубе определить скорость звука  $v$  по формуле (4.71) и отношение теплоемкостей  $\gamma$  по выражению (4.67), учитывая, что молярная масса воздуха  $\mu = 29 \cdot 10^{-3}$  кг/моль.

9. Оценить погрешность результатов измерений.

10. Выключить установку тумблером “Сеть”.

### Контрольные вопросы

1. В чем заключается резонансный метод определения скорости звука в газе?

2. Почему при распространении звука в закрытой трубе могут образовываться узлы и пучности? При каком условии они образуются?

3. Зависит ли отношение теплоемкостей  $\gamma = C_p/C_v$  для воздуха от температуры в исследуемом интервале температур? Будет ли наблюдаться такая зависимость при изменении температуры от очень малых значений до  $1000^\circ\text{C}$ ?

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 45

### Исследование теплоемкости твердых тел

Цель работы: определение теплоемкости образцов металлов методом электрического нагрева.

### Методика измерений

Согласно (4.13) теплоемкостью тела называется величина, равная количеству теплоты, которое нужно сообщить телу, чтобы повысить его температуру на один Кельвин. В небольшом интервале температур  $\Delta T$  теплоемкость тел можно считать постоянной, тогда

$$C = \frac{Q}{\Delta T}. \quad (4.72)$$

Теплоемкость единицы массы вещества называется удельной теплоемкостью (4.15)

$$c^{уд} = \frac{C}{m}. \quad (4.73)$$

Теплоемкость одного моля вещества называется молярной теплоемкостью (4.14). Она может быть определена по формуле

$$C^{мол} = c^{уд} \mu, \quad (4.74)$$

где  $\mu$  - молярная масса вещества.

Для определения теплоемкости тела оно помещается в калориметр. При достаточно медленном нагревании калориметра в фиксированный момент времени температура во всех точках калориметра и исследуемого образца одинакова. Тогда уравнение теплового баланса можно записать в виде

$$Q = Q_k + Q_T + \Delta Q_1, \quad (4.75)$$

где  $Q$  - количество теплоты, переданное нагревательной спиралью,  $Q_k$  - количество теплоты, затраченное на нагревание калориметра,  $Q_T$  - количество теплоты, затраченное на нагревание исследуемого тела,  $\Delta Q_1$  - потери теплоты в теплоизоляцию калориметра и в окружающую среду при нагревании калориметра с образцом.

Переданное нагревателем количество теплоты будет

$$Q = i u \tau, \quad (4.76)$$

где  $i$  - ток,  $u$  - напряжение на нагревательном элементе,  $\tau$  - интервал времени, за который температура калориметра и образца изменяется на  $\Delta t$ .

Количество теплоты, затраченное на нагревание калориметра, может быть определено при нагревании пустого калориметра (без образца). В этом случае уравнение теплового баланса имеет вид

$$i u \tau_0 = Q_k + \Delta Q_2, \quad (4.77)$$

где  $\Delta Q_2$  - потери тепла в теплоизоляцию и окружающую среду при нагревании пустого калориметра,  $\tau_0$  - интервал времени, за который температура калориметра (без образца) изменяется на  $\Delta t$ .

При условии постоянства мощности источника питания нагревательного элемента из уравнений (4.75) – (4.77) получаем

$$iu(\tau - \tau_0) = Q_T + (\Delta Q_1 - \Delta Q_2). \quad (4.78)$$

Поскольку температура защитного кожуха калориметра во время эксперимента практически равна комнатной, можно допустить, что потери теплоты малы по сравнению с количеством теплоты, затраченной на нагревание исследуемого тела и калориметра. Это тем более справедливо для разности тепловых потерь при нагревании калориметра с образцом и пустого калориметра ( $\Delta Q_1 - \Delta Q_2$ ) в одном и том же интервале температур. Тогда вторым слагаемым в уравнении (4.78) можно пренебречь:

$$IU(\tau - \tau_0) = Q_T. \quad (4.79)$$

Полагая, что теплоемкость образца в рабочем интервале температур  $\Delta t = t - t_0$  ( $\Delta t < 20^\circ\text{C}$ ) постоянна, согласно формуле (4.72) получаем линейную зависимость времени нагревания от изменения температуры исследуемого образца:

$$iu(\tau - \tau_0) = C(t - t_0). \quad (4.80)$$

Зависимость (4.80) может быть проверена экспериментально. Построив график  $(\tau - \tau_0) = f(t - t_0)$ , необходимо для двух достаточно удаленных точек А и Б на графике определить угловой коэффициент  $k$  наклона прямой к оси абсцисс

$$k = \frac{(\tau - \tau_0)_B - (\tau - \tau_0)_A}{(t - t_0)_B - (t - t_0)_A}. \quad (4.81)$$

Тогда теплоемкость образца можно рассчитать по формуле:

$$C = k \cdot iu. \quad (4.82)$$

### Экспериментальная установка

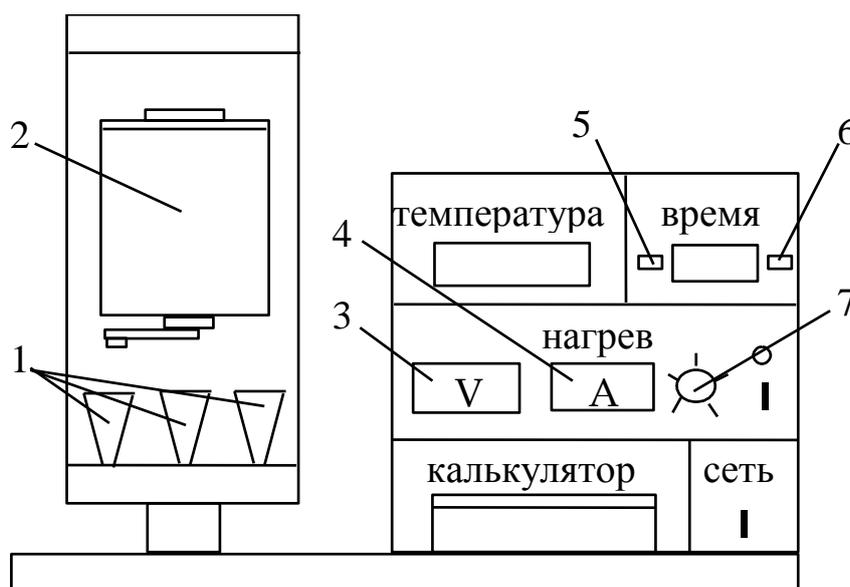


Рис. 4.13

Для определения теплоемкости твердых тел предназначена экспериментальная установка, общий вид которой приведен на рис.4.13. Нагревание исследуемых образцов 1 производится в калориметре 2, схема которого приведена на рис.4.14.

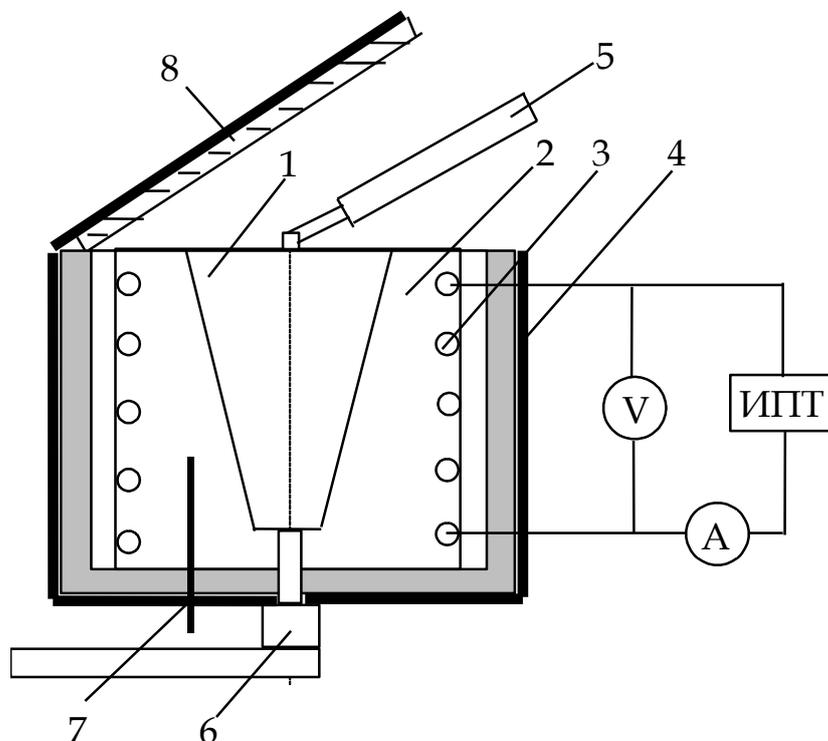


Рис. 4.14

Как показано на рис.4.14, калориметр представляет собой корпус 2 с коническим отверстием, куда помещается исследуемый образец 1. На наружной поверхности корпуса в специальных пазах размещена нагревательная спираль 3. Снаружи корпус калориметра закрыт теплоизолированным кожухом 4. Крышка 8 калориметра также теплоизолирована.

Рычаг 6 и рукоятка 5 предназначены для удаления образцов из конической полости после окончания эксперимента. Для измерения температуры калориметра в его корпусе находится датчик температуры 7. Температура регистрируется на цифровом индикаторе.

Таблица 4.10

№ п.п	Материал образца	Молярная масса $\mu$ (кг/моль)
1	Дюраль	$26,98 \cdot 10^{-3}$
2	Латунь	$63,57 \cdot 10^{-3}$
3	Сталь	$55,85 \cdot 10^{-3}$

Исследуемые образцы размещены в гнездах в первом ряду (рис.4.13). На торцевой поверхности образца нанесено значение его массы. Молярные массы образцов приведены в табл.4.10.

После окончания нагревания для более быстрого охлаждения калориметра могут быть использованы образцы, размещенные в гнездах во втором ряду, которые последовательно помещаются в калориметр.

### Порядок выполнения работы

1. Снять кожух с рабочего элемента установки и повесить его на винты задней панели. Включить установку тумблером «Сеть».

2. Плотно закрыть крышку пустого калориметра и включить нагреватель. Установить регулятор мощности источника питания 7 (рис.4.13) в положение «4» или «5».

3. При температуре калориметра  $t_0 = 25^\circ\text{C}$  включить секундомер. Произвести 7 – 10 измерений времени нагревания пустого калориметра  $\tau_0$  через  $1^\circ\text{C}$  (т.е. при температурах калориметра  $t = 26^\circ\text{C}$ ,  $27^\circ\text{C}$  и т.д.). Показания приборов занести в табл.4.11, при этом изменение температуры калориметра рассчитать по формуле  $\Delta t = t - t_0$ .

4. Выключить нагреватель и охладить калориметр до начальной температуры  $t_0$ . Для более быстрого остывания калориметра до температуры  $t_0$  последовательно помещать в него образцы, расположенные во втором ряду (без маркировки массы). Извлечение образцов из калориметра производить рукояткой 5 (рис.4.14) при повороте рычага 6 в крайнее правое положение.

Таблица 4.11

№ п.п	u В	i А	$t_0$ $^\circ\text{C}$	t $^\circ\text{C}$	(t- $t_0$ ) $^\circ\text{C}$	$\tau$ с	$\tau$ с	( $\tau-\tau_0$ ) с	C $\frac{\text{Дж}}{\text{К}}$	$c^{\text{уд}}$ $\frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{К}}$	$C^{\text{мол}}$ $\frac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{К}}$
1											
2											
3											
4											
5											
6											
7											

5. Повернув рычаг 6 в левое положение, поместить в калориметр один из исследуемых образцов, взятый по указанию преподавателя.

Плотно закрыть крышку калориметра и в течение 3...5 минут подождать выравнивания температур калориметра и образца.

6. Включить нагреватель калориметра, **установив то же значение напряжения в цепи**, что и при нагревании пустого калориметра.

7. Включить секундомер **при той же начальной температуре  $t_0$** , что и при нагревании пустого калориметра. Сделать 7 – 10 измерений времени нагревания калориметра с образцом  $\tau$  через интервал температуры  $1^\circ\text{C}$ . Показания секундомера занести в табл.4.11.

8. Выключить нагреватель, открыть крышку калориметра и вынуть образец.

9. Построить график  $(\tau - \tau_0) = f(t - t_0)$ , откладывая по оси ординат разность времени нагревания калориметра с образцом и пустого калориметра  $(\tau - \tau_0)$ , а по оси абсцисс - изменение температуры калориметра  $(t - t_0)$ . По нанесенным опытным точкам провести усредненную прямую и по формуле (4.81) определить угловой коэффициент  $k$  наклона прямой к оси абсцисс.

10. По формуле (4.82) рассчитать теплоемкость  $C$  образца.

11. По формулам (4.73) и (4.74) определить удельную  $c^{уд}$  и молярную  $C^{мол}$  теплоемкости образца, используя для этого данные табл. 4.10.

12. Оценить погрешность результатов измерений.

13. Выключить установку тумблером “Сеть”.

### Контрольные вопросы

1. В чем заключается метод электрического нагрева для определения теплоемкости твердых тел?

2. Почему в данной работе нагревание пустого калориметра и калориметра с образцом производится при одной и той же мощности источника питания нагревательного элемента?

3. Рассчитайте согласно закону Дюлонга и Пти удельные теплоемкости алюминия  $\text{Al}_{13}^{27}$  и железа  $\text{Fe}_{26}^{56}$ .

### Вопросы по разделу 4

1. Какой газ называется идеальным? Уравнение состояния идеального газа, границы его применимости.

2. Что такое изопроцессы и каким законам они подчиняются?

3. Первое начало термодинамики, его физический смысл.

4. Расчет работы, совершаемой газом, и его внутренней энергии.

5. Применение первого начала термодинамики к изопроцессам.

6. Что называется теплоемкостью вещества, а также удельной и молярной теплоемкостью?

7. Как связаны молярные теплоемкости  $C_p^{\text{мол}}$  и  $C_v^{\text{мол}}$ ? Вывести соотношение Майера.

8. Каков физический смысл универсальной газовой постоянной?

9. Адиабатический процесс. Вывод уравнения Пуассона.

10. Первое начало термодинамики и работа газа в адиабатическом процессе.

11. Что называется числом степеней свободы молекул? В чем заключается закон равномерного распределения энергии по степеням свободы молекул?

12. Расчет теплоемкостей  $C_p^{\text{мол}}$  и  $C_v^{\text{мол}}$  идеального газа.

13. Расчет теплоемкости твердых тел. Закон Дюлонга и Пти.

14. Обратимые и необратимые процессы. Энтропия, ее физический смысл.

15. Второе начало термодинамики. Его формулировки и физический смысл.

16. Тепловые двигатели. К.п.д. теплового двигателя.

17. Цикл Карно. К.п.д. цикла Карно.

## РАЗДЕЛ 5

### Распределения Максвелла и Больцмана. Явления переноса

Существует два подхода к описанию физических свойств систем, состоящих из большого числа частиц. С одной стороны, можно использовать термодинамический метод, при котором не рассматриваются внутреннее строение изучаемой системы и характер движения отдельных частиц. При этом состояние системы описывается набором термодинамических параметров (давление, температура, объем, концентрация и т.д.), характеризующих состояние системы в целом.

С другой стороны, можно использовать статистический метод, основанный на использовании теории вероятностей. С точки зрения молекулярной физики термодинамические параметры есть некие средние величины, характеризующие состояние системы в целом, которые могут быть определены из законов движения атомов или молекул на основе статистической физики. Статистические закономерности изучаются с помощью *теории вероятностей*.

В теории вероятностей существует понятие случайного события, которое в результате опыта (или какого-либо действия) может как произойти, так и не произойти. Вероятность случайного события есть количественная мера ожидаемой возможности его появления. Так, если произведено  $N$  опытов, то при большом их числе вероятность  $w_i$  какого-либо события

$$w_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_i}{N}, \quad (5.1)$$

где  $N_i$  - число опытов, в которых произошло данное событие.

В молекулярной физике в качестве опыта можно рассматривать измерение той или иной физической величины (например, скорости, импульса, энергии и т.д.) и в этом случае событием будет являться равенство результата измерений определенному значению.

Поскольку для всех возможных событий в данных опытах  $\sum N_i = N$ , то приходим к условию:

$$\sum w_i = \sum \frac{N_i}{N} = \frac{1}{N} \sum N_i = 1. \quad (5.2)$$

Формула (5.2) носит название условия нормировки вероятности.

Перейдем к случаю, когда характеризующая событие случайная величина  $x$  может принимать непрерывный ряд значений (например, скорость хаотического движения частиц). Теперь уже можно говорить не о вероятности совершения того или иного события, а о вероятности

получения результата в диапазоне от  $x$  до  $x + dx$ . Рассматривая малый интервал значений  $dx$ , имеем

$$dw = \frac{dN}{N}, \quad (5.3)$$

где  $dw$  - вероятность получения результата в интервале от  $x$  до  $x + dx$ ,  $dN$  - число опытов, в которых получен результат от  $x$  до  $x + dx$ .

Ясно, что вероятность  $dw$  пропорциональна ширине интервала  $dx$ , то есть

$$dw = f(x)dx, \quad (5.4)$$

где функция  $f(x)$ , с помощью которой можно аналитически рассчитать вероятность  $dw$ , носит название функции распределения вероятностей или плотности вероятности. Тогда

$$dN = N \cdot f(x)dx. \quad (5.5)$$

### **Свойства функции распределения:**

1. Условие нормировки. Согласно (5.2) для непрерывного распределения результата получаем (если  $x$  меняется от  $-\infty$  до  $+\infty$ )\*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dw = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1. \quad (5.6)$$

Из выражения (5.6) следует, что площадь под графиком функции  $f(x)$  (рис.5.1) во всем диапазоне изменения  $x$  равна единице.

2. Вероятность  $\Delta w$  получения результата, лежащего в диапазоне от  $x_1 = a$  до  $x_2 = b$  определяется по формуле:

$$\Delta w = \int_a^b f(x)dx. \quad (5.7)$$

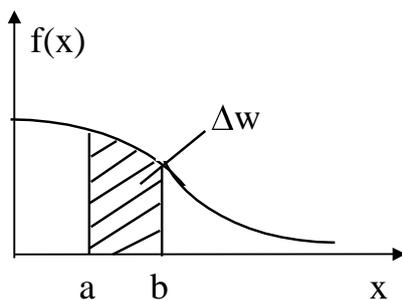


Рис. 5.1

Как показано на рис.5.1, вероятность  $\Delta w$  представляет собой площадь под графиком функции  $f(x)$  в диапазоне изменения  $x$  от  $a$  до  $b$ .

Для числа опытов  $\Delta N$ , в которых получаем интересующий нас результат от  $a$  до  $b$ , согласно (5.5) имеем

$$\Delta N = N \int_a^b f(x)dx. \quad (5.8)$$

\* Вообще говоря, интегрирование ведется во всем диапазоне значений  $x$ , в частности, это может быть и  $(0, \infty)$  для модуля скорости или энергии и т.д.

3. Зная функцию распределения  $f(x)$ , можно найти среднее значение результатов измерения величины  $x$ . Среднее значение любой функции  $\varphi(x)$  вычисляется по формуле

$$\langle \varphi(x) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \cdot f(x) \cdot dx. \quad (5.9)$$

### 5.1 Распределение Максвелла

Рассмотрим газ в состоянии теплового равновесия при температуре  $T$ . Молекулы газа находятся в беспорядочном, хаотическом движении. Скорости молекул могут быть самыми различными и случайным образом изменяться при столкновении с другими молекулами.

Перейдем к изучению закономерностей распределения молекул газа по скоростям. Рассмотрим распределение молекул по величине (модулю) скорости  $v$ .

Согласно (5.3) и (5.4) вероятность  $dw_v$  того, что величина скорости  $v$  произвольно взятой молекулы находится в интервале от  $v$  до  $v + dv$ , равна

$$dw_v = \frac{dN_v}{N} = f(v)dv. \quad (5.10)$$

Здесь  $dN_v$  - число молекул, скорости которых лежат в интервале от  $v$  до  $v + dv$ ;  $N$  - суммарное число молекул в газе.

Вид функции распределения  $f(v)$  был получен Максвеллом (см.рис.5.2)

$$f(v) = \left( \frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} \cdot \exp\left( -\frac{m_0 v^2}{2kT} \right) \cdot 4\pi v^2, \quad (5.11)$$

где  $m_0$  - масса молекулы газа,  $T$  - температура газа,  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К - постоянная Больцмана.

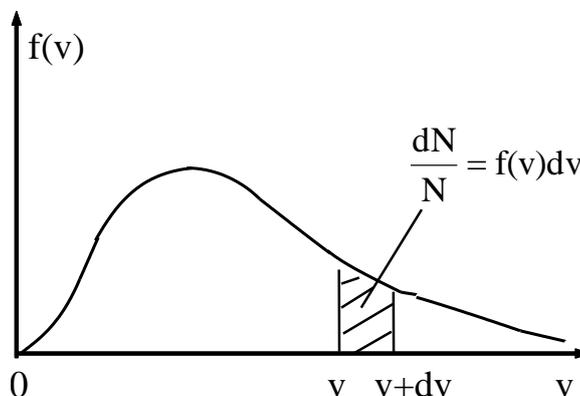


Рис.5.2

Для относительного числа молекул, имеющих величину скорости в диапазоне от  $v$  до  $v + dv$ , согласно (5.10) получаем так называемое *распределение Максвелла по модулю скорости*

$$dw_v = \frac{dN_v}{N} = \left( \frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} \cdot \exp\left( -\frac{m_0 v^2}{2kT} \right) \cdot 4\pi v^2 dv. \quad (5.12)$$

С помощью распределения Максвелла можно рассчитать **характерные скорости** молекул.

1. Наиболее вероятная скорость  $v_B$  находится из условия, что функция  $f(v)$  максимальна, то есть

$$\frac{df(v)}{dv} = 0$$

Подставляя (5.11) и производя преобразования, получаем

$$v_B = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}, \quad (5.13)$$

где  $R = 8,31$  Дж/(моль·К) - универсальная газовая постоянная,  $\mu$  - молярная масса газа.

2. Средняя арифметическая скорость молекул находится согласно формуле (5.9) интегрированием

$$\langle v \rangle = \int_0^{\infty} v \cdot f(v) \cdot dv = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}}. \quad (5.14)$$

3. Средняя квадратичная скорость молекулы по определению равна

$$v_{\text{ср.кв}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle}. \quad (5.15)$$

Находим согласно (5.9) выражение для  $\langle v^2 \rangle$ :

$$\langle v^2 \rangle = \int_0^{\infty} v^2 \cdot f(v) \cdot dv = \frac{3kT}{m_0}.$$

Следовательно, с учетом определения (5.15), имеем

$$v_{\text{ср.кв}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}. \quad (5.16)$$

## 5.2 Распределение Больцмана

До сих пор мы считали, что на молекулы газа не действуют внешние силы. Теперь рассмотрим распределение частиц во внешнем потенциальном поле. Если поле отсутствует, то каждая молекула газа

может с равной вероятностью оказаться в любой точке пространства, занятого газом, то есть концентрация молекул будет везде одинакова.

Как показал Больцман, при наличии внешнего потенциального поля вероятность  $dw_{x,y,z}$  того, что молекула (взятая наугад) окажется в элементе объема  $dV = dx dy dz$  вблизи точки с координатами  $x, y, z$

$$dw_{x,y,z} = \frac{dN_{x,y,z}}{N} = B \exp\left[-\frac{U(x,y,z)}{kT}\right] dx dy dz, \quad (5.17)$$

где  $dN_{x,y,z}$  - число молекул, у которых координата  $x$  лежит в пределах от  $x$  до  $x + dx$ , при этом  $y$  лежит в пределах от  $y$  до  $y + dy$  и координата  $z$  в пределах от  $z$  до  $z + dz$ ;  $U(x,y,z)$  - потенциальная энергия молекулы во внешнем силовом поле.

Из формулы (5.17) следует, что

$$\frac{dN_{x,y,z}}{dx dy dz} = n(x, y, z) = BN \exp\left[-\frac{U(x, y, z)}{kT}\right],$$

где  $n(x, y, z)$  - концентрация молекул в физически малом объеме вблизи точки  $(x, y, z)$ .

Полагая  $n(x_0, y_0, z_0) = n_0$ , где  $n_0$  - концентрация газа там, где  $U(x_0, y_0, z_0) = 0$ , получаем *распределение Больцмана* в общем виде

$$n(x, y, z) = n_0 \exp\left[-\frac{U(x, y, z)}{kT}\right]. \quad (5.18)$$

В качестве примера рассмотрим распределение газа в атмосфере Земли (считая температуру постоянной). Для молекулы газа вблизи поверхности Земли

$$U(x, y, z) = m_0 g z,$$

где  $z$  - высота над поверхностью Земли.

Тогда концентрация молекул на высоте  $z$ :

$$n(z) = n_0 \exp\left(-\frac{m_0 g z}{kT}\right), \quad (5.19)$$

где  $n_0$  - концентрация молекул у поверхности Земли.

Используя уравнение состояния идеального газа  $P = nkT$ , получим зависимость атмосферного давления от высоты

$$P(z) = P_0 \exp\left(-\frac{m_0 g z}{kT}\right), \quad (5.20)$$

которая называется барометрической формулой.

### 5.3 Физические основы явлений переноса в газах

Явления переноса обусловлены хаотическим движением молекул газа, которые, переходя из одних точек пространства в другие, переносят присущие им импульс, энергию и массу. К таким явлениям относятся: внутреннее трение или вязкость (обусловленная переносом импульса), теплопроводность (обусловленная переносом энергии) и диффузия (обусловленная переносом массы вещества).

Определяющую роль в явлениях переноса играют столкновения молекул в процессе их хаотического движения, вследствие чего все явления переноса протекают со скоростями, существенно меньшими скорости теплового движения.

Для изучения движения молекул газа удобно использовать модель движения твердых упругих шаров, которые в промежутках между столкновениями перемещаются по инерции равномерно и прямолинейно. В момент столкновения происходит изменение скорости их движения как по величине, так и по направлению.

Введем некоторые количественные характеристики.

Минимальное расстояние, на которое сближаются при столкновении центры молекул, называют эффективным диаметром  $d_{эф}$  молекул. При увеличении температуры газа эффективный диаметр молекул уменьшается, однако в первом приближении в небольшом интервале температур  $d_{эф}$  можно считать величиной постоянной для данного газа.

Другой характеристикой является средняя длина свободного пробега молекул, то есть среднее расстояние, которое молекулы пробегают между двумя последовательными столкновениями:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \pi d_{эф}^2 n}, \quad (5.21)$$

где  $n$  - концентрация молекул газа, т.е. число молекул в единице объема. При известных температуре  $T$  и давлении  $P$  газа она может быть определена из уравнения состояния идеального газа:

$$n = \frac{P}{kT}. \quad (5.22)$$

За одну секунду молекула газа пробегает расстояние, равное ее средней скорости. Следовательно, среднее число столкновений молекулы за одну секунду  $z$  будет равно

$$z = \frac{\langle v \rangle}{\lambda}, \quad (5.23)$$

где  $\langle v \rangle$  - средняя арифметическая скорость теплового движения молекул газа (5.14):

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}}.$$

Явления переноса возникают при нарушении равновесия в системе, носят необратимый характер и стремятся привести систему в равновесное состояние. Они вызваны неодинаковыми значениями какой-либо величины в пространстве. Так, внутреннее трение вызвано разными скоростями течения слоев газа, теплопроводность - разностью температур слоев, диффузия - переменной концентрацией частиц вещества.

Неоднородность в пространстве значений величины может быть задана с помощью ее градиента - вектора, характеризующего изменение этой величины при перемещении на единичную длину и направленного в сторону наиболее быстрого ее возрастания. При записи уравнений переноса будем полагать, что изменение этой величины происходит только вдоль одной из координат, например, вдоль оси ОХ.

#### ***5.4 Вывод уравнений переноса на основе молекулярно-кинетической теории газов***

##### **Внутреннее трение (вязкость)**

Если скорость потока газа меняется от слоя к слою, то на границе между смежными слоями действуют силы внутреннего трения, которые стремятся выровнять скорости слоев.

Рассмотрим поток газа, распространяющийся вдоль оси ОУ (рис.5.3). Его скорость изменяется непрерывно от слоя к слою по закону  $u = u(x)$ . Каждая молекула газа обладает двумя типами движения: упорядоченным со скоростью  $u$  и хаотическим тепловым движением со скоростью  $\langle v \rangle$ .

Выделим воображаемую поверхность площадью  $S$ , параллельную скорости течения слоев газа. За счет хаотического движения молекулы более “быстрого” слоя, расположенного слева от поверхности, переходят в более “медленный” слой, находящийся справа, и при столкновении передают часть своего “упорядоченного” импульса молекулам “медленного” слоя, ускоряя их движение. Это означает, что слой газа, расположенный справа от поверхности площадью  $S$ , будет подвергаться действию силы, направленной вдоль оси ОУ (по скорости упорядоченного движения слоев газа).

В то же время молекулы “правого” слоя, переходя в левый, при столкновении забирают часть “упорядоченного” импульса у более “быстрых” молекул этого слоя, тормозя их движение. Соответственно

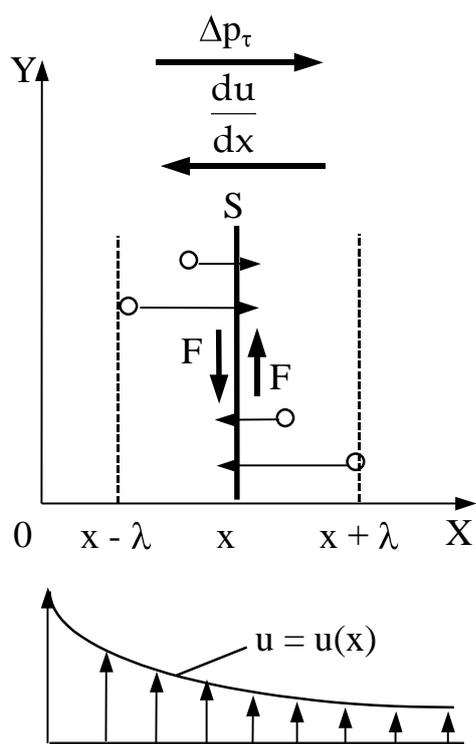


Рис. 5.3

на слой газа, расположенный слева от поверхности, будет действовать сила, направленная в сторону, противоположную скорости  $u$  упорядоченного движения (то есть противоположно оси  $OY$ ). Эти силы и являются силами внутреннего трения.

Каждая молекула, проходящая через поверхность площадью  $S$ , имеет импульс  $m_0u$ , определяемый скоростью упорядоченного движения в том месте, где произошло последнее столкновение этой молекулы с другой. В среднем это соударение происходит на расстоянии от поверхности, равном средней длине свободного пробега  $\lambda$ .

Поэтому для молекул, движущихся в направлении оси  $OX$ , примем, что их скорость будет  $u = u_{x-\lambda}$ , а для молекул, движущихся в противоположном направлении, -  $u = u_{x+\lambda}$ , тогда импульс, переносимый через поверхность за одну секунду, будет

$$\Delta p_\tau = Nm_0(u_{x-\lambda} - u_{x+\lambda}),$$

где  $N$  - число молекул, проходящих через поверхность площадью  $S$  в выбранном направлении за одну секунду.

Согласно второму закону Ньютона, это и есть сила внутреннего трения, действующая между слоями газа вдоль поверхности площадью  $S$ . То есть силу внутреннего трения можно записать следующим образом:

$$F = Nm_0|u_{x-\lambda} - u_{x+\lambda}|. \quad (5.24)$$

Найдем число молекул, проходящих за одну секунду через поверхность  $S$ . Упрощенно представим, что молекулы движутся вдоль трех взаимно перпендикулярных осей  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$  со средней арифметической скоростью  $\langle v \rangle$  хаотического движения. Так как направления движения равновероятны, то одна треть всех молекул движется вдоль оси  $OX$ , причем половина из них - в положительном направлении. Соответственно, через поверхность площадью  $S$  за одну

секунду как справа налево, так и слева направо будет проходить следующее число молекул:

$$N = \frac{1}{6} n \langle v \rangle S. \quad (5.25)$$

Подставляя (5.25) в (5.24), получаем выражение для силы внутреннего трения в виде:

$$F = \frac{1}{6} n \langle v \rangle S m_0 |u_{x-\lambda} - u_{x+\lambda}|. \quad (5.26)$$

Так как средняя длина свободного пробега молекул  $\lambda$  очень мала, разность скоростей в выражении (5.26) можно представить через градиент скорости газа  $du/dx$ :

$$|u_{x-\lambda} - u_{x+\lambda}| = 2\lambda \frac{du}{dx}.$$

Учитывая, что произведение  $nm_0$  равно плотности газа  $\rho$ , можно записать

$$F = \frac{1}{3} \langle v \rangle \lambda \rho \cdot \left| \frac{du}{dx} \right| \cdot S. \quad (5.27)$$

Величина

$$\eta = \frac{1}{3} \langle v \rangle \lambda \rho. \quad (5.28)$$

называется коэффициентом вязкости (внутреннего трения).

С учетом (5.28) выражение (5.27) принимает вид

$$F = \eta \cdot \left| \frac{du}{dx} \right| \cdot S, \quad (5.29)$$

и называется *формулой Ньютона* для силы внутреннего трения.

Из уравнения (5.29) следует, что коэффициент вязкости численно равен силе внутреннего трения, действующей на единицу площади поверхности соприкасающихся слоев газа при единичном градиенте скорости. В СИ коэффициент вязкости измеряется в кг/(м·с).

Поскольку сила трения направлена вдоль поверхности, разделяющей слои газа, то направления силы трения и градиента скорости всегда взаимно перпендикулярны (рис.5.3). Поэтому уравнение (5.29) определяет только величину (модуль) силы трения.

Следует заметить, что формула Ньютона (5.29) справедлива также и для жидких сред, однако в этом случае вместо выражения (5.28) необходимо использовать другие зависимости для расчета коэффициента вязкости  $\eta$ .

## Теплопроводность

Это процесс передачи теплоты от более нагретого слоя газа к менее нагретому за счет хаотического теплового движения молекул.

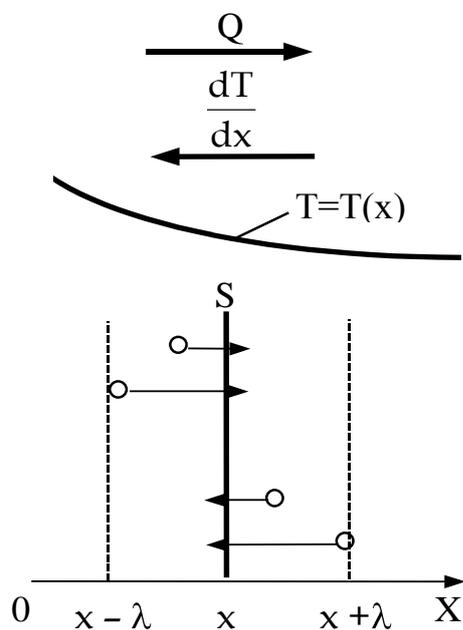


Рис. 5.4

Рассмотрим явление теплопроводности. Пусть температура газа изменяется вдоль оси  $Ox$  по закону  $T = T(x)$ , как это показано на рис.5.4. Вследствие различия температуры слоев средняя кинетическая энергия молекул газа будет также различна. При соударении молекул в процессе их хаотического теплового движения происходит обмен кинетической энергией, что и обуславливает передачу тепла в направлении убывания температуры.

Выделим поверхность площадью  $S$ , перпендикулярную оси  $Ox$ . Поскольку процесс теплопроводности не сопровождается макроскопическим движением среды, то количество молекул, пересекающих эту поверхность за одну секунду слева направо и справа налево, будет одинаковым. Оно определяется формулой (5.25).

Согласно закону равномерного распределения энергии по степеням свободы, каждая молекула обладает средней кинетической энергией, вычисляемой по формуле (4.27):

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{i}{2} kT = c_V^{\text{уд}} m_0 T, \quad (5.30)$$

где  $i$  - число степеней свободы молекулы,  $c_V^{\text{уд}}$  - удельная теплоемкость газа при постоянном объеме.

Как видно из выражения (5.30), средняя энергия молекулы соответствует температуре газа в том месте, где произошло ее последнее столкновение с другой молекулой. Следовательно, молекулы, движущиеся в направлении оси  $Ox$ , обладают энергией  $\langle \varepsilon_{x-\lambda} \rangle$ , соответствующей температуре  $T_{x-\lambda}$ , а молекулы, движущиеся в противоположном направлении, - энергией  $\langle \varepsilon_{x+\lambda} \rangle$ , соответствующей температуре  $T_{x+\lambda}$ . Тогда количество теплоты, переносимое через поверхность  $S$  за одну секунду (тепловой поток), запишется в виде

$$Q = N(\langle \varepsilon_{x-\lambda} \rangle - \langle \varepsilon_{x+\lambda} \rangle) = \frac{1}{6} n \langle v \rangle S c_V^{уд} m_0 (T_{x-\lambda} - T_{x+\lambda}). \quad (5.31)$$

Разность температур в уравнении (5.31) можно выразить через градиент температуры  $dT/dx$ :

$$T_{x-\lambda} - T_{x+\lambda} = -2\lambda \frac{dT}{dx}.$$

Учитывая, что  $n \cdot m_0 = \rho$ , выражение (5.31) можно записать в виде

$$Q = -\frac{1}{3} \langle v \rangle \lambda \rho c_V^{уд} \frac{dT}{dx} S. \quad (5.32)$$

Отсюда имеем формулу для определения коэффициента теплопроводности  $\kappa$  в газах:

$$\kappa = \frac{1}{3} \langle v \rangle \lambda c_V^{уд} \rho. \quad (5.33)$$

Подставляя (5.33) в (5.32), получаем *закон Фурье*, определяющий количество теплоты  $Q$ , переданное вследствие теплопроводности через поверхность площадью  $S$ , перпендикулярную оси  $Ox$ , за время  $\tau$ :

$$Q = -\kappa \frac{dT}{dx} S \tau, \quad (5.34)$$

Из закона Фурье следует, что коэффициент теплопроводности численно равен количеству теплоты, проходящему через единицу площади поверхности за единицу времени при единичном градиенте температуры. В СИ единицей измерения коэффициента теплопроводности является Вт/(м·К).

Знак минус в уравнении (5.34) обусловлен тем, что перенос количества теплоты всегда осуществляется в сторону уменьшения температуры. Градиент же по определению всегда направлен в сторону увеличения соответствующей величины.

## Диффузия

Это процесс выравнивания концентраций газов, который сопровождается переносом массы соответствующего компонента газа из области с большей в область с меньшей концентрацией.

Рассмотрим простейший случай диффузии газов, когда компоненты двух газов мало отличаются друг от друга по массе молекул и их эффективному диаметру. Такой процесс называется самодиффузией.

Предположим, что концентрация одного из компонентов газа изменяется вдоль оси  $Ox$  по закону  $n = n(x)$  (рис.5.5). Выделим поверхность площадью  $S$ , перпендикулярную оси  $Ox$ . Вследствие

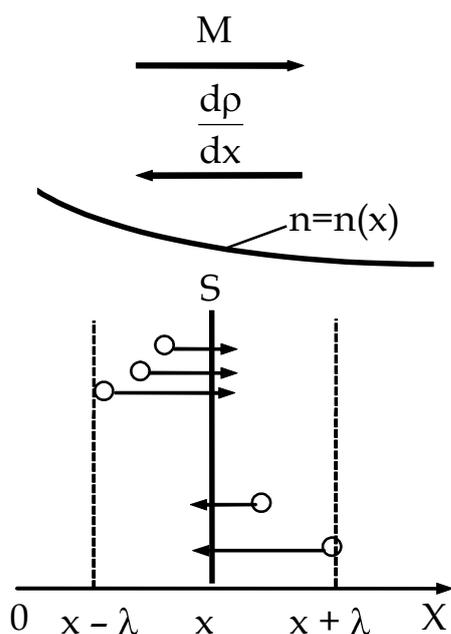


Рис. 5.5

последнее соударение молекул происходит на расстоянии от поверхности, равном длине свободного пробега, молекулы, движущиеся в положительном направлении, будут иметь концентрацию  $n_{x-\lambda}$ , а молекулы, движущиеся в противоположном направлении, - концентрацию  $n_{x+\lambda}$ .

Следовательно,

$$M = \frac{1}{6} \langle v \rangle S m_0 (n_{x-\lambda} - n_{x+\lambda}). \quad (5.35)$$

Зная, что  $n \cdot m_0 = \rho$ , выражение (5.35) можно представить в виде

$$M = \frac{1}{6} \langle v \rangle S (\rho_{x-\lambda} - \rho_{x+\lambda}).$$

Выражая разность плотностей рассматриваемого компонента газа через градиент плотности  $\frac{d\rho}{dx}$ :

$$\rho_{x-\lambda} - \rho_{x+\lambda} = -2\lambda \frac{d\rho}{dx},$$

получаем уравнение диффузии

$$M = -\frac{1}{3} \langle v \rangle \lambda \frac{d\rho}{dx} S. \quad (5.36)$$

Согласно (5.36) можно записать формулу для расчета коэффициента диффузии D

неодинаковости концентраций число молекул этого компонента, проходящих в процессе хаотического теплового движения через поверхность S за одну секунду в положительном ( $N'$ ) и отрицательном ( $N''$ ) направлениях, будет различно. Соответственно, масса компонента газа, переносимая через поверхность S за одну секунду, запишется в виде

$$M = m_0(N' - N'').$$

Исходя из упрощенных представлений, число молекул, пересекающих поверхность S за одну секунду в рассматриваемом направлении, определяется формулой (5.25). Поскольку в среднем

$$D = \frac{1}{3} \langle v \rangle \lambda. \quad (5.37)$$

Подставляя (5.37) в (5.36), получаем закон Фика, определяющий массу компонента газа, переносимую через поверхность площадью  $S$ , перпендикулярную оси  $OX$ , за время  $\tau$

$$M = -D \frac{d\rho}{dx} S \tau. \quad (5.38)$$

Коэффициент диффузии численно равен массе данного компонента, переносимой через единицу площади поверхности за единицу времени при единичном градиенте плотности. В СИ коэффициент диффузии измеряется в  $\text{м}^2/\text{с}$ .

Знак минус в уравнении (5.38) обусловлен тем, что перенос массы осуществляется в сторону уменьшения концентрации (плотности) газа, а градиент по определению всегда направлен в сторону увеличения соответствующей величины.

### **5.5 Зависимость коэффициентов переноса от термодинамических параметров газа**

Выражения (5.28), (5.33) и (5.37) позволяют с учетом соотношений (5.14), (5.21) и (5.22) найти зависимости коэффициентов вязкости, теплопроводности и диффузии от давления и температуры газа.

Например, зависимость коэффициента вязкости  $\eta$  от температуры и давления получаем, подставляя выражения для  $\langle v \rangle$  (5.14) и  $\lambda$  (5.21) в формулу (5.28)

$$\eta = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \pi d_{\text{эф}}^2} \cdot \rho.$$

Учитывая, что  $\rho = n \cdot m_0$ , имеем

$$\eta = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} \cdot \frac{m_0}{\sqrt{2} \cdot \pi d_{\text{эф}}^2} = \text{const} \cdot \sqrt{T}. \quad (5.39)$$

Формула (5.39) показывает, что от давления газа коэффициент вязкости не зависит.

С помощью формул (5.33), (5.21) и (5.14) можно доказать, что зависимость коэффициента теплопроводности от параметров газа такая же, как и коэффициента вязкости.

Для коэффициента диффузии, подставляя в формулу (5.37) выражения для  $\langle v \rangle$  (5.14) и  $\lambda$  (5.21), имеем

$$D = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \pi d_{\text{эф}}^2 n},$$

или с учетом (5.22):

$$D = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} \cdot \frac{kT}{\sqrt{2} \cdot \pi d_{\text{эф}}^2 P} = \text{const} \cdot \frac{T^{3/2}}{T}. \quad (5.40)$$

Определив опытным путем любой коэффициент переноса, можно оценить среднюю длину свободного пробега  $\lambda$ , число соударений за одну секунду  $z$ , а также эффективный диаметр молекул газа  $d_{\text{эф}}$ .

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 29(к)

### Распределение Максвелла

Цель работы: экспериментальное подтверждение с помощью компьютерной модели распределения молекул идеального газа по скоростям и определение молярной массы исследуемого газа.

#### Методика измерений

Распределение молекул газа по скоростям согласно (5.10) имеет вид

$$\frac{dN_v}{N} = F(v)dv, \quad (5.41)$$

где  $dN_v$  – число молекул, скорость которых находится в интервале от  $v$  до  $v + dv$ ,  $F(v)$  – функция распределения Максвелла (5.11):

$$F(v) = \left( \frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} \cdot \exp\left( -\frac{m_0 v^2}{2kT} \right) \cdot 4\pi v^2. \quad (5.42)$$

Здесь  $v$  – модуль скорости молекулы,  $m_0$  – масса молекулы,  $T$  – абсолютная температура,  $k$  – постоянная Больцмана.

Из (5.41) следует, что число молекул  $\Delta N$ , скорости которых лежат в диапазоне от  $v$  до  $v + \Delta v$ , при условии, что интервал  $\Delta v$  мал, можно представить как

$$\Delta N = N \cdot F(v)\Delta v.$$

Рассмотрим идеальный газ в закрытом сосуде ( $N = \text{const}$ ). Будем экспериментально подсчитывать число молекул  $\Delta N$ , скорости которых лежат вблизи значений  $v_1$ ,  $v_2$  и т.д. и построим график зависимости  $\Delta N = f(v)$ . Если выбирать один и тот же интервал «разброса» значений скорости  $\Delta v$ , то этот график фактически будет иллюстрировать

функцию распределения Максвелла (5.42). Примерный вид графика показан на рис.5.6.

Значение скорости, соответствующее максимуму  $\Delta N$  называется наиболее вероятной скоростью  $v_B$ . Согласно (5.13) наиболее

вероятная скорость молекул может быть рассчитана по формуле:

$$v_B = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} \quad \text{или} \quad v_B = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}, \quad (5.43)$$

где  $R = 8,31$  Дж/(моль·К) – универсальная газовая постоянная,  $\mu$  – молярная масса газа.

Кроме того, в молекулярной физике используются также понятия средней арифметической (5.14) и средней квадратичной (5.16) скорости молекул газа. В частности, средняя арифметическая скорость молекул газа определяется формулой (5.14)

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} \quad \text{или} \quad \langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}}. \quad (5.44)$$

Как следует из выражений (5.43) и (5.44), характерные скорости распределения Максвелла зависят от температуры и от молярной массы газа.

Возведем в квадрат обе части формулы (5.44)

$$\langle v \rangle^2 = \frac{8RT}{\pi \mu}. \quad (5.45)$$

Если экспериментально определить среднюю арифметическую скорость молекул для различных значений температуры газа и построить зависимость  $\langle v \rangle^2 = f(T)$ , то по наклону полученной прямой можно определить молярную массу исследуемого газа.

### Порядок выполнения работы

Запустить программу, подведя маркер мыши под значок "Открытая физика.1.1" на рабочем столе компьютера и дважды щёлкнув левой кнопкой мыши. Выбрать раздел «Термодинамика и молекулярная физика» и «Распределение Максвелла» (рис.5.7).

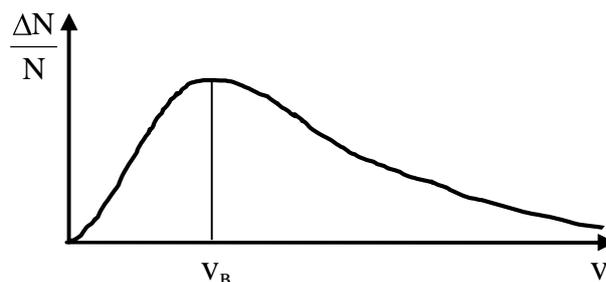


Рис. 5.6

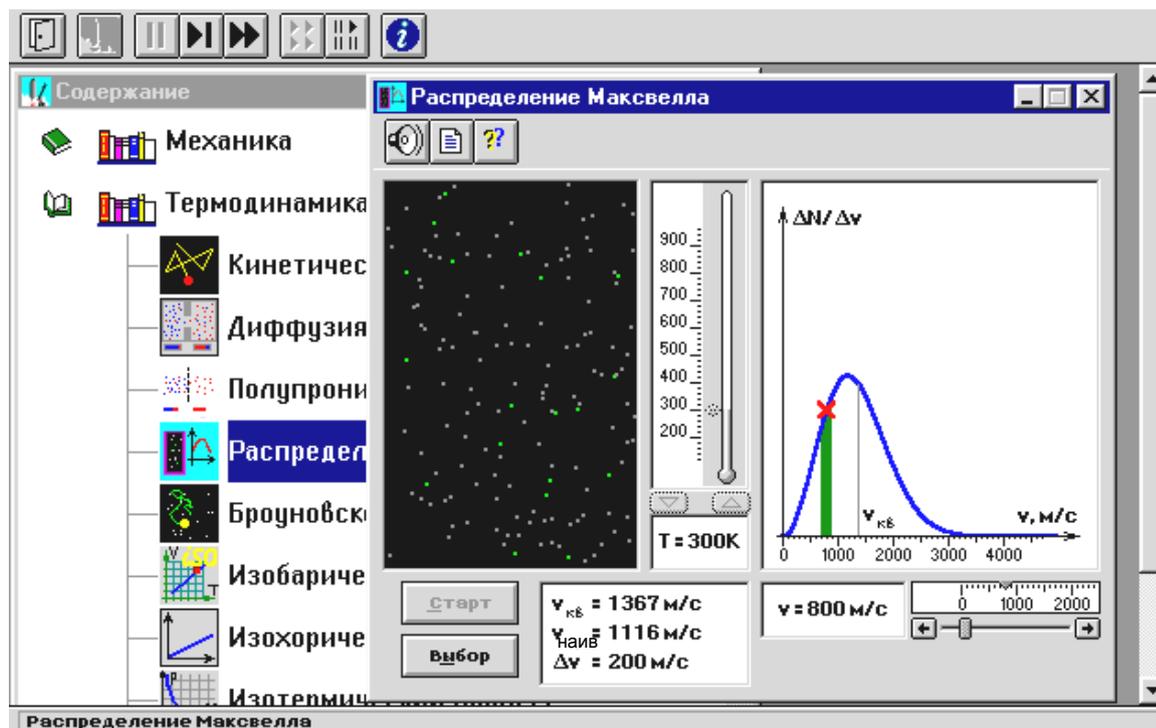


Рис. 5.7

Рассмотреть внимательно изображение на экране монитора компьютера. Обратит внимание на систему частиц, движущихся в замкнутом объеме слева во внутреннем окне. Они абсолютно упруго сталкиваются друг с другом и со стенками сосуда. Количество молекул около 100 и данная система является хорошей «механической» моделью идеального газа.

В процессе исследований можно останавливать движение всех молекул (при нажатии кнопки «||» вверх) и получать как бы «мгновенные фотографии», на которых выделяются более ярким свечением частицы (точки), скорости которых лежат в заданном диапазоне  $\Delta v$  вблизи заданной скорости  $v$  (т.е. имеющие скорости в интервале от  $v$  до  $v + \Delta v$ ). Для продолжения наблюдения движения частиц нажимается кнопка «▶▶».

Зарисовать график функции распределения Максвелла в свой конспект лабораторной работы. Дописать, если необходимо, нужные формулы (кнопка с изображением страницы служит для вызова теоретических сведений).

### Упражнение 1.

#### Экспериментальное исследование распределения Максвелла

1. Нажать мышью кнопки «▶▶» и «Выбор». Подвести маркер мыши к движку регулятора температуры и установить первое из полученных вашей бригадой от преподавателя значение температуры  $T_1$ . Выписать

в табл.5.1 теоретическое значение наиболее вероятной скорости  $v_B^{\text{теор}}$  молекул (на модели установки она обозначена  $v_{\text{наиб}}$ ) для этой температуры.

2. Зацепив мышью движок, установить скорость  $v$  выделенной группы молекул вблизи первого заданного в таблице 5.1 значения.

3. Нажать мышью кнопку «Старт».

4. Через 10–20 секунд нажать кнопку «||» и подсчитать на «мгновенной фотографии» количество молекул  $\Delta N$ , скорости которых лежат в диапазоне  $\Delta v = 200$  м/с вблизи заданной скорости молекул  $v$  (они более яркие). Результат записать в таблицу 5.1.

Таблица 5.1

$$T_1 = \text{_____ К}; v_B^{\text{теор}} = \text{_____ м/с}$$

№ п.п.	$v$ [м/с]	500	1000	1500	2000	2500	3000	3500
1	$\Delta N$							
2	$\Delta N$							
Среднее	$\overline{\Delta N}$							

Таблица 5.2

$$T_2 = \text{_____ К}; v_B^{\text{теор}} = \text{_____ м/с}$$

№ п.п.	$v$ [м/с]	500	1000	1500	2000	2500	3000	3500
1	$\Delta N$							
2	$\Delta N$							
Среднее	$\overline{\Delta N}$							

Таблица 5.3

$$T_3 = \text{_____ К}; v_B^{\text{теор}} = \text{_____ м/с}$$

№ п.п.	$v$ [м/с]	500	1000	1500	2000	2500	3000	3500
1	$\Delta N$							
2	$\Delta N$							
Среднее	$\overline{\Delta N}$							

5. Нажать кнопку «▶▶» и через 10–20 секунд (нажав кнопку «||») получить еще одну мгновенную фотографию. Подсчитав количество частиц, результаты записать в табл.5.1. Рассчитать среднее значение числа молекул  $\overline{\Delta N}$ , скорости которых лежат вблизи заданного значения.

6. Изменить величину скорости и сделать по 2 измерения (п.п. 3–5) для каждого значения скорости из табл.5.1. Подсчитать среднее значение числа молекул  $\overline{\Delta N}$  для этих измерений.

7. Устанавливая последовательно значения температуры  $T_2$  и  $T_3$ , повторить измерения (п.п. 2–6), записывая результаты в табл.5.2 и 5.3.

8. По результатам измерений построить для каждого значения температуры графики зависимости среднего числа молекул  $\overline{\Delta N}$  от модуля скорости  $v$ .

9. По каждому построенному графику определить экспериментальное значение наиболее вероятной скорости  $v_B$ , соответствующей максимуму распределения Максвелла.

10. Сравнить полученные значения с теоретическими значениями и для каждой температуры подсчитать относительную погрешность измерений по формуле

$$\delta = \frac{v_B^{\text{теор}} - v_B}{v_B^{\text{теор}}} \cdot 100\% . \quad (5.46)$$

### Упражнение 2.

Экспериментальное определение средней арифметической скорости и молярной массы исследуемого газа

1. По данным таблиц 5.1, 5.2, 5.3, используя средние значения, подсчитать общее число молекул  $\sum \overline{\Delta N}$ , участвующих в измерениях для каждой температуры во всем исследуемом диапазоне скоростей. Результаты записать в табл. 5.4.

Таблица 5.4

№ п.п.	T К	$\sum \overline{\Delta N}$ –	$\langle v \rangle$ м/с	$\langle v \rangle^2$ (м/с) <sup>2</sup>	Газ	$\langle v \rangle_{\text{теор}}$ м/с
1						
2						
3						

2. Для каждой температуры по данным таблиц 5.1, 5.2, 5.3 определить экспериментальное значение средней арифметической скорости молекул газа по формуле

$$\langle v \rangle = \frac{\overline{\Delta N}(v_1) \cdot v_1 + \overline{\Delta N}(v_2) \cdot v_2 + \dots + \overline{\Delta N}(v_7) \cdot v_7}{\sum \overline{\Delta N}} . \quad (5.47)$$

3. Подсчитать  $\langle v \rangle^2$  и занести эти значения в табл.5.4.

4. Построить график зависимости квадрата средней арифметической скорости молекул  $\langle v \rangle^2$  от температуры  $T$  и по двум любым точкам графика определить угловой коэффициент  $b$  полученной прямой:

$$b = \frac{\langle v \rangle_2^2 - \langle v \rangle_1^2}{T_2 - T_1}. \quad (5.48)$$

5. Согласно формуле (5.45) определить значение молярной массы газа

$$\mu = \frac{8R}{\pi b}. \quad (5.49)$$

6. По табл.5.5 подобрать газ, молярная масса которого достаточно близка к полученному по формуле (5.49) значению.

Таблица 5.5

Газ	Водород	Гелий	Неон	Азот	Кислород
$\mu$ [ $10^{-3}$ кг/моль]	2	4	20	28	36

7. По формуле (5.44) подсчитать и записать в табл. 5.4 теоретические значения средней арифметической скорости  $\langle v \rangle_{\text{теор}}$  молекул газа.

8. Для каждого значения температуры вычислить относительную погрешность измерения по формуле

$$\delta = \frac{\langle v \rangle_{\text{теор}} - \langle v \rangle}{\langle v \rangle_{\text{теор}}} \cdot 100\%. \quad (5.50)$$

9. По всем построенным в лабораторной работе графикам провести анализ результатов и сделать выводы.

### Контрольные вопросы

1. Как в работе получают кривые распределения Максвелла для различных значений температуры газа?

2. Характерные скорости молекул в распределении Максвелла.

3. Как по данным измерений определить среднюю арифметическую и среднюю квадратичную скорость молекул газа при заданной температуре?

4. Как в работе определяется вид исследуемого газа?

5. На сколько процентов отличаются наиболее вероятная, средняя арифметическая и средняя квадратичная скорости молекул идеального газа?

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 21

### Определение коэффициента вязкости воздуха капиллярным методом

Цель работы: изучение явления внутреннего трения воздуха как одного из явлений переноса в газах.

#### Методика измерений

Для определения коэффициента вязкости воздух продувается через длинный тонкий канал (капилляр) с небольшой скоростью. При малых скоростях потока течение в канале является ламинарным, то есть поток воздуха движется отдельными слоями, и его скорость в каждой точке направлена вдоль оси канала. Такое течение устанавливается на некотором расстоянии от входа в капилляр, поэтому для достижения достаточной точности эксперимента необходимо выполнение условия  $R \ll L$ , где  $R$  - радиус,  $L$  - длина капилляра.

Рассмотрим подробнее течение газа в круглом канале диаметром  $d = 2R$  при ламинарном режиме течения. Выделим воображаемый цилиндрический объем радиусом  $r$  и длиной  $L$ , как это показано на рис.5.8 а.

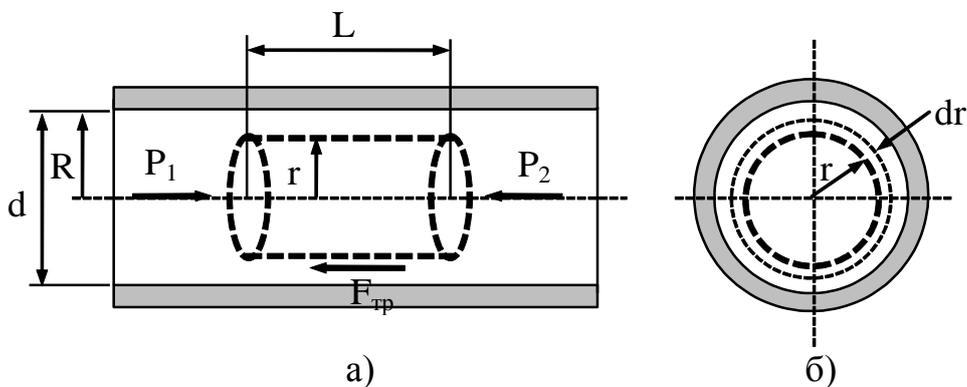


Рис. 5.8

Обозначим давление на торцах цилиндра через  $P_1$  и  $P_2$ . При установившемся течении вектор скорости в каждой точке канала не меняется со временем. Тогда сила давления на выбранный объем  $(P_1 - P_2)\pi r^2$ , действующая в направлении течения газа, уравновешивается силой внутреннего трения  $F$ , действующей со стороны наружных слоев газа:

$$(P_1 - P_2)\pi r^2 = F. \quad (5.51)$$

Сила внутреннего трения определяется по формуле Ньютона (5.29):

$$F = \eta \cdot \left| \frac{du}{dr} \right| \cdot S,$$

где  $S$  - площадь боковой поверхности цилиндра.

Вследствие трения скорость газа убывает с увеличением расстояния от оси канала. Следовательно, величина  $du/dr$  отрицательна и  $\left| \frac{du}{dr} \right| = -\frac{du}{dr}$ . Исходя из этого, силу внутреннего трения можно представить в виде:

$$F = -\eta \frac{du}{dr} 2\pi r L. \quad (5.52)$$

Выражение (5.51) с учетом (5.52) запишется следующим образом:

$$(P_1 - P_2)\pi r^2 = -\eta \frac{du}{dr} 2\pi r L.$$

Разделяя переменные, получаем

$$du = -\frac{P_1 - P_2}{2L\eta} r \cdot dr.$$

Проинтегрируем это уравнение для пределов, найденных с учетом условия, что сила внутреннего трения о стенку канала тормозит прилегающий к ней слой газа, то есть при  $r = R$   $u = 0$ :

$$\int_u^0 du = -\frac{P_1 - P_2}{2L\eta} \cdot \int_r^R r \cdot dr.$$

Получаем параболический закон изменения скорости газа по радиусу канала:

$$u = \frac{\Delta P}{4\eta L} (R^2 - r^2), \quad (5.53)$$

где  $\Delta P = P_1 - P_2$ .

Вычислим объемный расход газа (объем газа, протекающий за единицу времени через поперечное сечение канала). Разобьем поперечное сечение канала на кольца шириной  $dr$  (рис.5.8 б). Объемный расход газа через кольцо радиусом  $r$  можно представить в виде

$$dQ = u \cdot dS = \frac{\Delta P}{4\eta L} (R^2 - r^2) \cdot 2\pi r \cdot dr.$$

Соответственно, объемный расход газа  $Q$  через канал будет

$$Q = \frac{\pi \cdot \Delta P}{2\eta L} \cdot \int_0^R (R^2 - r^2) \cdot r \cdot dr.$$

Интегрируя, получаем формулу Пуазейля:

$$Q = \frac{\pi R^4 \Delta P}{8 \eta L}. \quad (5.54)$$

Соотношение (5.54) используется для экспериментального определения коэффициента вязкости газа. Измеряя объемный расход  $Q$  и разность давлений  $\Delta P$  воздуха на концах капилляра длиной  $L$  и диаметром  $d$ , коэффициент вязкости можно рассчитать по формуле:

$$\eta = \frac{\pi (d/2)^4 \Delta P}{8QL}. \quad (5.55)$$

### Экспериментальная установка

Для определения коэффициента вязкости воздуха предназначены экспериментальные установки, общий вид которых приведен на рис.5.9, рис.5.10 и рис.5.11.

#### Установка № 1

Воздух в капилляр 2 нагнетается микрокомпрессором, вмонтированным в блок управления. Величина объемного расхода воздуха устанавливается посредством регулятора 5 и измеряется реометром 1. Следует заметить, что во всем диапазоне изменения объемного расхода скорость движения воздуха в капилляре сравнительно невелика (до 40 м/с), так что не нарушается ламинарный режим течения.

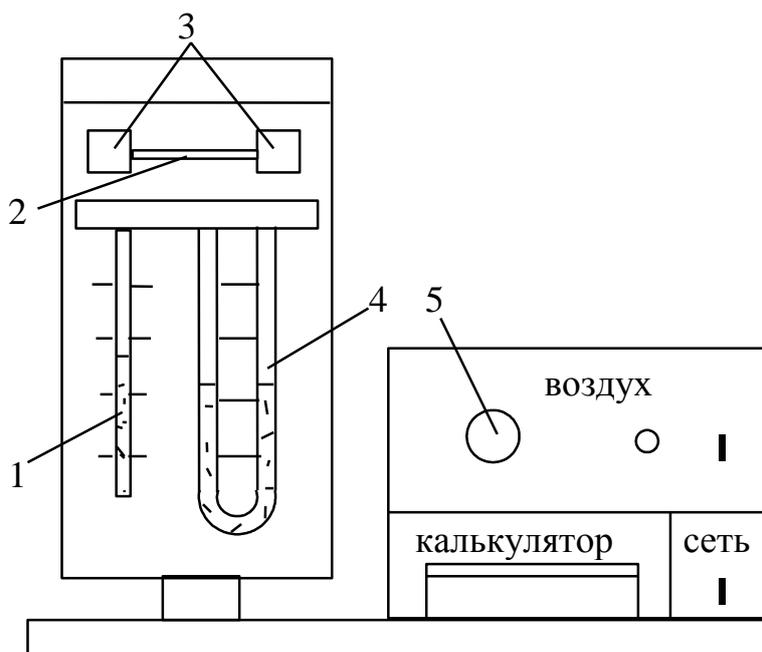


Рис. 5.9

Для определения разности давлений воздуха на концах капилляра предназначен U - образный манометр 4, колена которого соединены с камерами отбора давления 3.

Геометрические размеры капилляра: диаметр  $d$  и длина  $L$  указаны на лицевой панели установки.

### Установка № 2

Воздух в капилляр 2 нагнетается микрокомпрессором 6. Величина объемного расхода воздуха устанавливается посредством регулятора 5 и измеряется реометром 1.

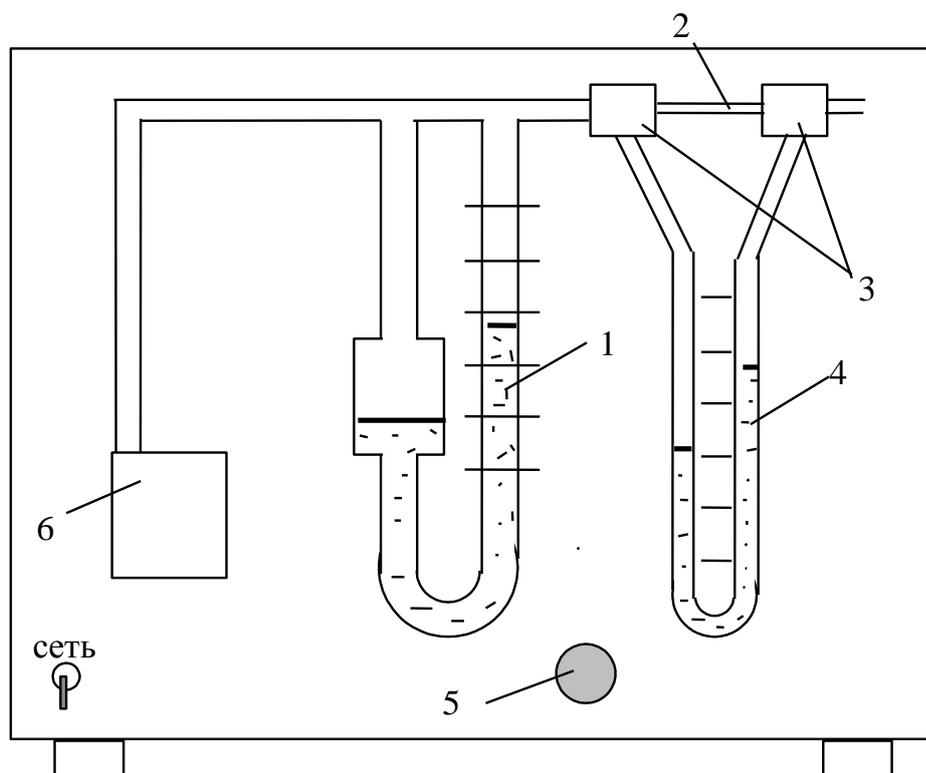


Рис.5.10

Поскольку шкала реометра проградуирована в литрах/минуту, необходимо сделать перевод единиц в систему СИ по формуле:

$$Q[\text{м}^3/\text{с}] = \frac{Q}{6 \cdot 10^4} [\text{л/мин}]$$

Для определения разности давлений воздуха на концах капилляра предназначен U - образный манометр 4, колена которого соединены с камерами отбора давления 3. Показания манометра в мм. вод. ст. также нужно перевести в систему единиц СИ

$$\Delta P[\text{Па}] = 10 \cdot \Delta P[\text{мм рт.ст.}].$$

Геометрические размеры капилляра: диаметр  $d = 1,15 \cdot 10^{-3}$  м и длина  $L = 0,1$  м.

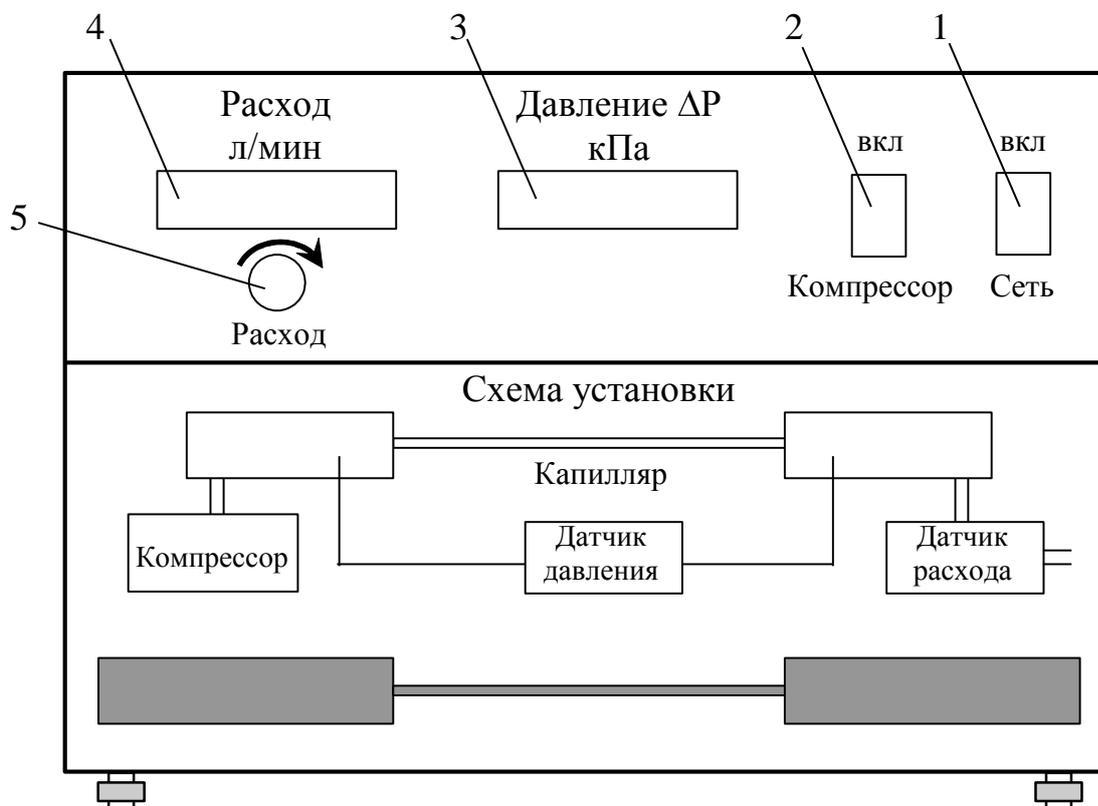
**Установка № 3**

Рис.5.11

Воздух в капилляр нагнетается компрессором, который вмонтирован в блок управления и включается тумблером 2. Величина объемного расхода воздуха устанавливается посредством регулятора 5 и фиксируется датчиком расхода 4. Поскольку датчик проградуирован в литрах/минуту, необходимо сделать перевод значений в систему СИ по формуле:

$$Q[\text{м}^3/\text{с}] = \frac{Q}{6 \cdot 10^4} [\text{л}/\text{мин}] .$$

Разность давлений  $\Delta P$  на концах капилляра измеряется с помощью цифрового датчика давления 3.

Геометрические размеры капилляра:  
диаметр  $d = 8,3 \cdot 10^{-4}$  м; длина  $L = 0,1$  м.

**Порядок выполнения работы**

1. Включить установку тумблером «Сеть». В установке № 3 включить компрессор тумблером 2.

2. С помощью регулятора расхода 5 установить по показаниям реометра 1 выбранное значение объемного расхода воздуха  $Q$ .

3. Замерить разность давлений  $\Delta P$  в коленах манометра 4. Значения  $Q$  и  $\Delta P$  занести в табл.5.6.

Таблица 5.6

№ п/п	$Q$ м <sup>3</sup> /с	$\Delta P$ Па	$T$ К	$P$ Па	$\eta$ кг/(м·с)	$\langle v \rangle$ м/с	$\lambda$ м	$z$ 1/с	$n$ 1/м <sup>3</sup>	$d_{эф}$ м
1										
2										
3										
4										
5										

4. Повторить измерения по п.п 2, 3 для 3..5 значений объемного расхода воздуха.

5. Определить по термометру температуру воздуха в помещении лаборатории  $T$  и по барометру определить атмосферное давление  $P$ .

6. Для каждого режима определить коэффициент вязкости  $\eta$  воздуха по формуле (5.55). Найти среднее значение коэффициента вязкости  $\bar{\eta}$ .

7. Вычислить среднюю арифметическую скорость движения молекул воздуха по формуле (5.14), учитывая, что молярная масса воздуха  $\mu = 29 \cdot 10^{-3}$  кг/моль.

8. Определить среднюю длину свободного пробега  $\lambda$  из формулы (5.28) и среднее число соударений молекул за одну секунду  $z$  по формуле (5.23). При этом плотность воздуха  $\rho$  находится с учетом измеренных значений температуры  $T$  и давления  $P$  по формуле  $\rho = P\mu/RT$ .

9. Найти концентрацию молекул воздуха  $n$  из уравнения (5.22) и по формуле (5.21) рассчитать эффективный диаметр молекул  $d_{эф}$ .

10. Оценить погрешность результатов измерений.

11. Выключить установку тумблером “Сеть”.

### Контрольные вопросы

1. В чем заключается капиллярный метод определения коэффициента вязкости?

2. Связь каких параметров определяется формулой Пуазейля?

3. Как изменяется скорость движения газа по радиусу канала при ламинарном режиме течения?

4. Каким образом, проводя измерения расхода воздуха, разности давлений на концах капилляра, давления и температуры воздуха, можно оценить значения величин  $\langle v \rangle$ ,  $\lambda$ ,  $z$ ,  $n$ ,  $d_{эф}$  и т.д.?

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 22

### Исследование явления внутреннего трения при различных режимах течения газа

Цель работы: изучение различных режимов течения воздуха в канале. Определение коэффициента вязкости и критического числа Рейнольдса.

#### Методика измерений

Рассмотрим движение газа в канале диаметром  $d$ . В зависимости от скорости движения газа можно выделить два существенно различных режима течения.

При малых скоростях потока течение является ламинарным. Характерная особенность ламинарного режима течения - движение потока газа отдельными слоями параллельно оси канала. С увеличением скорости потока течение становится турбулентным. При турбулентном режиме течения возникают микрообъемы газа, каждый из которых некоторое расстояние движется как целое в любом направлении с определенной скоростью. Микрообъемы газа совершают движение по сложным траекториям, что приводит к интенсивному перемешиванию слоев. Турбулентное течение газа обычно описывается средними по времени значениями скорости и давления в каждой точке потока.

Основным критерием, определяющим режим течения газа, является безразмерное число Рейнольдса

$$Re = \frac{\rho \bar{u} d}{\eta}. \quad (5.56)$$

где  $\bar{u}$  - осредненная по поперечному сечению скорость потока.

Переход ламинарного режима в турбулентный происходит при числе Рейнольдса, называемом критическим  $Re_{кр}$ . Если края входного сечения трубы острые, то  $Re_{кр} = 2300$ .

При ламинарном режиме течения силы внутреннего трения обусловлены хаотическим тепловым движением молекул газа и определяются по формуле Ньютона (5.29). Возникающая вследствие внутреннего трения разность давлений в двух сечениях канала связана с объемным расходом газа формулой Пуазейля (5.54), вывод которой приведен в описании лабораторной работы 21. Из формулы Пуазейля следует линейная зависимость разности давлений от объемного расхода при ламинарном режиме течения газа:

$$\Delta P = \frac{8\eta L}{\pi(d/2)^4} Q. \quad (5.57)$$

При турбулентном режиме течения перенос импульса осуществляется в результате хаотического теплового движения как молекул газа, так и турбулентных микрообъемов. Таким образом, наряду с силами внутреннего трения, описываемыми формулой (5.29), в потоке газа возникают силы турбулентного трения, а суммарное сопротивление потока газа существенно возрастает. Поэтому при больших расходах газа линейная зависимость разности давлений от объемного расхода (5.57) нарушается и  $\Delta P \sim Q^2$  (см. рис.5.12).

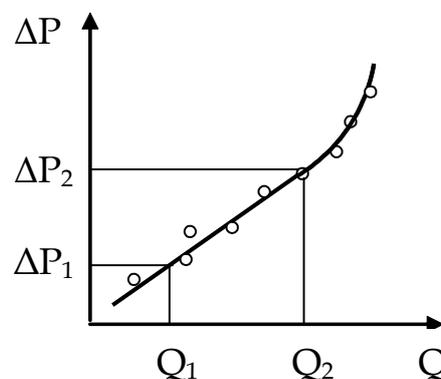


Рис. 5.12

Формула (5.57) может быть использована для экспериментального определения коэффициента вязкости газа. Изменяя расход газа в канале, строят, как показано на рис.5.12, зависимость  $\Delta P = f(Q)$  и находят угловой коэффициент наклона  $k$  прямолинейного участка графика к оси абсцисс по значениям двух достаточно удаленных друг от друга точек графика

$$k = \frac{\Delta P_2 - \Delta P_1}{Q_2 - Q_1}$$

Соответственно коэффициент вязкости рассчитывается по формуле:

$$\eta = k \frac{\pi(d/2)^4}{8L}. \quad (5.58)$$

Зная объемный расход воздуха  $Q_{кр}$ , при котором нарушается линейный характер зависимости  $\Delta P = f(Q)$ , можно вычислить для конкретных условий эксперимента значение критического числа Рейнольдса, при котором происходит переход ламинарного режима течения в турбулентный. Рассчитав среднюю по сечению скорость потока газа

$$\bar{u} = \frac{Q}{S} = \frac{4Q}{\pi d^2}, \quad (5.59)$$

с учетом формулы (5.56) получим

$$Re_{кр} = \frac{4\rho Q_{кр}}{\pi d \eta}. \quad (5.60)$$

### Экспериментальная установка

Для изучения режимов течения и определения коэффициента вязкости воздуха предназначена экспериментальная установка, общий вид которой приведен на рис.5.13.

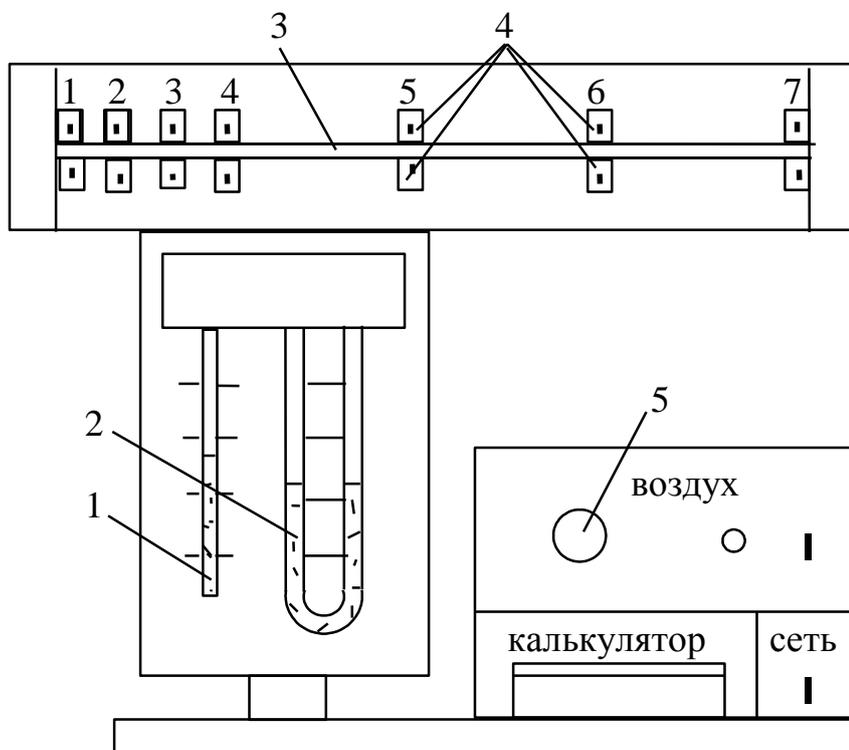


Рис. 5.13

Воздух в рабочую трубу 3 нагнетается компрессором, вмонтированным в блок приборов установки. Величина объемного расхода воздуха устанавливается посредством регулятора 5 и измеряется реометром 1.

По длине рабочей трубы 3 имеется ряд отверстий и установлены камеры отбора давления 4, которые с помощью тумблеров соединяются с коленами U - образного водяного манометра 2 для определения разности давления на участках трубы. Верхний ряд тумблеров соединяет камеры отбора давления с правым коленом манометра, нижний ряд - с левым. Соединение осуществляется переводом тумблера в нижнее положение.

Внутренний диаметр рабочей трубы  $d = 1,7 \cdot 10^{-3}$  м. Схема размещения камер отбора давления по длине трубы приведена на лицевой панели установки.

### Порядок выполнения работы

1. Включить установку тумблером “Сеть”.

2. Повернуть регулятор расхода воздуха 5 против часовой стрелки до упора, установив минимальный расход воздуха в канале. Соединить камеры отбора давления на участке 5 - 7 с манометром, для чего перевести в нижнее положение два тумблера для сечений 5 и 7 (один в верхнем и один в нижнем ряду).

3. Включить тумблер подачи воздуха и с помощью регулятора расхода 5 установить по показаниям реометра 1 значение объемного расхода воздуха  $Q = 2 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{с}$ . Измерить разность давлений  $\Delta P$  в коленах манометра 2. Полученные значения занести в табл.5.7.

Таблица 5.7

№ п/п	Q м <sup>3</sup> /с	$\Delta P$ Па	T К	P Па	$\eta$ кг/(м·с)	Q <sub>кр</sub> м <sup>3</sup> /с	Re <sub>кр</sub> -
1	$2 \cdot 10^{-5}$						
2	$2,5 \cdot 10^{-5}$						
3	$3 \cdot 10^{-5}$						
4	$3,5 \cdot 10^{-5}$						
5	$4 \cdot 10^{-5}$						
6	$4,5 \cdot 10^{-5}$						
7	$5 \cdot 10^{-5}$						
8	$5,5 \cdot 10^{-5}$						
9	$6 \cdot 10^{-5}$						

4. Повторить измерения по п.3 до значения объемного расхода воздуха Q, равного  $6 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{с}$ , увеличивая каждый раз значения Q на  $0,5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{с}$ . Полученные результаты занести в табл.5.7.

5. По термометру определить температуру в помещении лаборатории T, по барометру - атмосферное давление P.

6. Построить зависимость  $\Delta P = f(Q)$ , откладывая по оси ординат разность давлений  $\Delta P$  воздуха на участке 5 - 7, а по оси абсцисс - объемный расход воздуха Q.

7. Согласно формуле (5.58), по угловому коэффициенту наклона прямолинейного участка графика к оси абсцисс найти коэффициент вязкости воздуха  $\eta$ . При этом длину участка трубы 5 - 7 определить по схеме размещения камер отбора давлений, приведенной на лицевой панели установки.

8. По графику найти значение объемного расхода воздуха Q<sub>кр</sub>, при котором нарушается линейный характер этой зависимости. Из формулы (5.60) определить значение критического числа Рейнольдса,

при этом плотность воздуха рассчитать из уравнения состояния идеального газа  $\rho = \frac{P\mu}{RT}$ , полагая молярную массу воздуха  $\mu = 29 \cdot 10^{-3}$  кг/моль.

9. Оценить погрешность результатов измерений.
10. Выключить установку тумблером “Сеть”.

### Контрольные вопросы

1. Что называется ламинарным и турбулентным режимом течения газа?
2. Как определить режим течения газа в канале?
3. Объясните физическую сущность явления внутреннего трения при ламинарном и турбулентном режимах течения газа.
4. В чем заключается формула Пуазейля? Каковы условия ее применения?

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 23

### Определение коэффициента вязкости при течении воздуха в канале

Цель работы: изучение явления внутреннего трения в газах. Определение длины начального участка канала.

#### Методика измерений

При попадании газа в канал из большого резервуара скорости движения слоев вначале постоянны по сечению канала, как это показано на рис. 5.14.

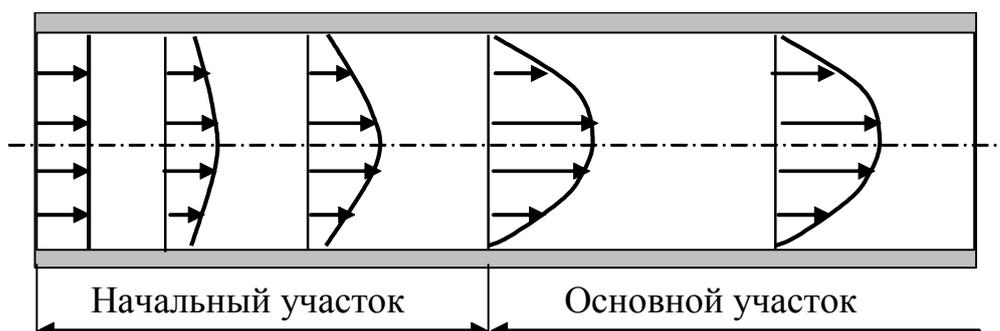


Рис.5.14

По мере продвижения газа картина распределения скоростей изменяется, так как сила трения о стенку тормозит прилегающий к ней слой газа. Расстояние  $L_H$ , на котором происходит формирование потока в канале, называется длиной начального участка. На основном участке канала картина распределения скорости движения газа для всех

сечений одинакова: вследствие внутреннего трения скорость движения газа равна нулю у стенки и максимальна на оси канала.

При относительно небольших скоростях течения (ламинарный режим) распределение скорости по сечению на основном участке канала подчиняется параболическому закону (5.53) и изменение давления может быть определено из формулы Пуазейля (5.54), вывод которой приведен в описании лабораторной работы 21:

$$\Delta P = \frac{8\eta Q}{\pi(d/2)^4} L. \quad (5.61)$$

Соотношение (5.61) показывает, что на основном участке канала при постоянном расходе газа ( $Q = \text{const}$ ) разность давлений в двух сечениях  $\Delta P$  будет изменяться прямо пропорционально длине  $L$  участка, для которого проводятся измерения. На начальном участке канала изменение давления будет больше вследствие движения с ускорением центральной части потока газа.

Экспериментально полученная зависимость изменения разности давлений по длине канала может быть использована для определения коэффициента вязкости  $\eta$  и длины начального участка канала  $L_H$ . Примерный вид зависимости  $\Delta P = f(L)$  показан на рис.5.15.

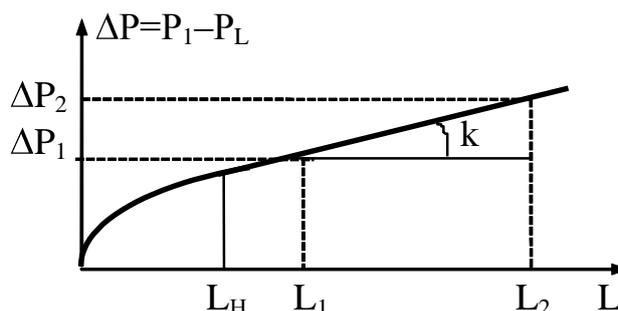


Рис. 5.15

Здесь  $\Delta P = P_1 - P_L$ , где  $P_1$  - давление газа на входе в канал,  $P_L$  - давление газа в сечении, находящемся на расстоянии  $L$  от входа в канал.

Угловой коэффициент наклона прямолинейного участка графика к оси абсцисс  $k$  можно определить по значениям двух достаточно удаленных друг от друга точек графика:

$$k = \frac{\Delta P_2 - \Delta P_1}{L_2 - L_1}.$$

Тогда коэффициент вязкости, согласно выражению (5.61), определяется по формуле

$$\eta = k \frac{\pi(d/2)^4}{8Q}. \quad (5.62)$$

Координата начала прямолинейного участка графика (рис.5.15) соответствует длине начального участка канала.

Теоретически длина начального участка при ламинарном режиме течения может быть оценена по формуле

$$L_H = 0,03 \cdot d \cdot Re, \quad (5.63)$$

где  $Re$  - число Рейнольдса.

Число Рейнольдса, согласно формулам (5.56) и (5.60), может быть записано в виде

$$Re = \frac{4\rho Q}{\pi d \eta}. \quad (5.64)$$

Таким образом, для определения длины начального участка канала необходимо знать коэффициент вязкости  $\eta$  и объемный расход газа в канале  $Q$ .

### Экспериментальная установка

Для определения коэффициента вязкости воздуха и длины начального участка канала предназначена экспериментальная установка, общий вид которой приведен на рис.5.16.

Воздух в рабочую трубу 3 нагнетается компрессором, вмонтированным в блок приборов установки. Величина объемного расхода воздуха устанавливается посредством регулятора 5 и измеряется реометром 1.

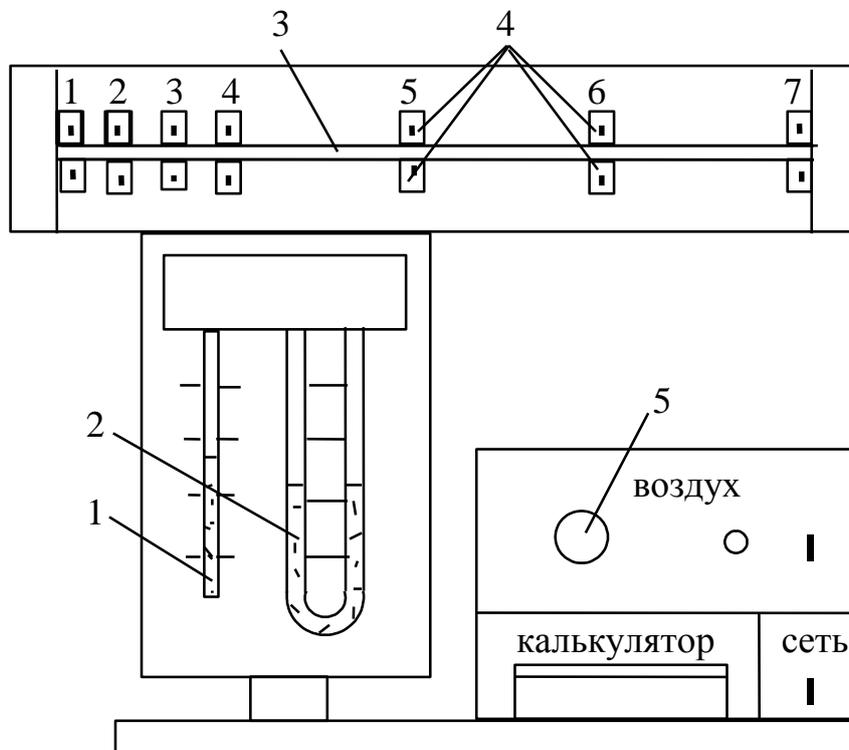


Рис. 5.16



7. Построить зависимость  $\Delta P = f(L)$ , откладывая по оси ординат разность давлений  $\Delta P$ , а по оси абсцисс - длину  $L$  участка, для которого проводились измерения. Согласно формуле (5.62) по угловому коэффициенту наклона прямолинейного участка графика к оси абсцисс  $k$  рассчитать коэффициент вязкости воздуха  $\eta$ .

8. Определить по графику длину начального участка канала  $L_{Н\text{ эксп}}$ .

9. По термометру определить температуру в помещении лаборатории  $T$ , по барометру - атмосферное давление  $P$ .

10. По формуле (5.64) определить значение числа Рейнольдса, при этом плотность воздуха рассчитать из уравнения состояния идеального

газа  $\rho = \frac{P\mu}{RT}$ , полагая молярную массу воздуха  $\mu = 29 \cdot 10^{-3}$  кг/моль.

11. Вычислить теоретическое значение длины начального участка  $L_{Н\text{ теор}}$  по формуле (5.63).

12. Сравнить экспериментальное и теоретическое значения длины начального участка и оценить погрешность результатов измерений.

13. Выключить установку тумблером “Сеть”.

### Контрольные вопросы

1. Получите параболический закон изменения скорости по сечению канала в зависимости от радиуса.

2. Связь каких параметров определяется формулой Пуазейля? Каковы условия ее применения?

3. Что называется начальным и основным участками канала?

4. Какова картина распределения скорости по поперечному сечению на начальном и основном участках канала?

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 26

### Определение коэффициента вязкости воздуха капиллярным вискозиметром

Цель работы: изучение явления внутреннего трения в газах.

#### Методика измерений

Для определения коэффициента вязкости воздуха используется протекание воздуха через длинный тонкий канал (капилляр) с небольшой скоростью. Из-за наличия внутреннего трения для протекания газа через капилляр требуется некоторая разность давлений на концах капилляра  $\Delta P$ .

Коэффициент внутреннего трения  $\eta$  связан с разностью давлений  $\Delta P$  и объемным расходом воздуха  $Q$  формулой Пуазейля (5.54), вывод которой изложен в работе 21:

$$\eta = \frac{\pi(d/2)^4 \Delta P}{8QL}, \quad (5.65)$$

где  $d = 2r$  – диаметр,  $L$  - длина капилляра.

Объемный расход воздуха равен объему  $V$ , протекающему через капилляр за единицу времени

$$Q = \frac{V}{\tau}. \quad (5.66)$$

Следовательно, расчетная формула лабораторной работы будет иметь вид:

$$\eta = \frac{\pi r^4 \Delta P \tau}{8VL}. \quad (5.67)$$

### Экспериментальная установка

Для определения коэффициента вязкости воздуха капиллярным вискозиметром предназначена экспериментальная установка, общий вид которой приведен на рис.5.17.

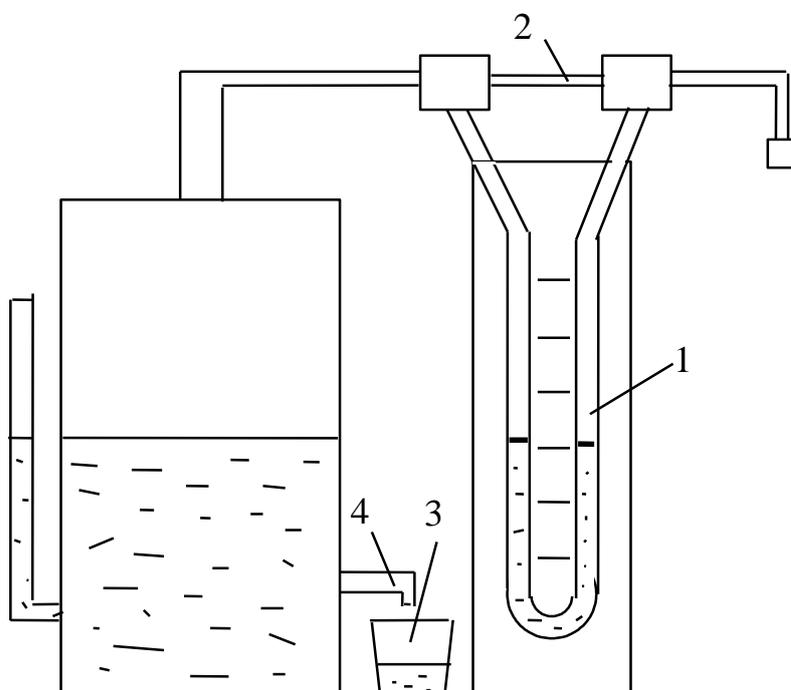


Рис. 5.17

При вытекании воды через кран 4 в мерную колбу 3, в капилляр 2 поступает воздух из атмосферы. Объем воздуха, прошедшего за время

$\tau$  через капилляр 2, равен объему воды, вытекшей из сосуда. Количество вытекшей за время  $\tau$  воды определяют с помощью мерной колбы 3.

Разность давлений на концах капилляра 2 определяется с помощью водяного U - образного манометра 1 по формуле

$$\Delta P = \rho_{\text{ж}} g \Delta h, \quad (5.68)$$

где  $\rho_{\text{ж}} = 10^3 \text{ кг/м}^3$  - плотность воды,  $\Delta h$  - разность уровней воды в коленах манометра [м].

Длина  $L$  и диаметр  $d$  капилляра указаны на экспериментальном стенде.

### Порядок выполнения работы

1. Открыть кран 4 (рис.5.16). Когда в капилляре установится стационарный режим, то есть разность уровней в манометре 1 станет постоянной, включить секундомер. Соответствующую этому режиму разность уровней  $\Delta P$  в манометре записать в табл. 5.9.

Таблица 5.9

№ п/п	V м <sup>3</sup>	$\tau$ с	$\Delta h$ м	$\Delta P$ Па	$\eta$ кг/(м·с)	T К	P Па	$\langle v \rangle$ м/с	$\lambda$ м	z 1/с	n 1/м <sup>3</sup>	$d_{\text{эф}}$ м
1												
2												
3												
4												
5												

2. Определить время  $\tau$  протекания определенного количества воздуха через капилляр. Объем прошедшего через капилляр воздуха фиксируется по объему воды, вытекшей из сосуда за время  $\tau$ .

3. Повторить измерения по п.п 1, 2 для 3..5 значений объема воздуха, протекшего через капилляр в пределах (0,2 ... 0,4) л при каждом измерении.

4. Для каждого режима вычислить разность давлений на концах капилляра по формуле (5.68).

5. Определить для каждого измерения значение коэффициента вязкости по формуле (5.67) и найти среднее значение коэффициента вязкости  $\bar{\eta}$ .

6. По термометру определить температуру в помещении лаборатории T, по барометру - атмосферное давление P.

7. Вычислить среднюю арифметическую скорость движения молекул воздуха по формуле (5.14), учитывая, что молярная масса воздуха  $\mu = 29 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$ .

8. Определить среднюю длину свободного пробега  $\lambda$  из формулы (5.28) и среднее число соударений молекул за одну секунду  $z$  по формуле (5.23). При этом плотность воздуха  $\rho$  находится с учетом измеренных значений температуры  $T$  и давления  $P$  в комнате по формуле  $\rho = \frac{P\mu}{RT}$ .

9. Найти концентрацию молекул воздуха  $n$  из уравнения (5.22) и рассчитать эффективный диаметр молекул  $d_{эф}$  по формуле (5.21).

10. Оценить погрешность результатов измерений.

### Контрольные вопросы

1. В чем состоит метод капиллярного вискозиметра?
2. Что выражает формула Пуазейля? Каковы условия ее применимости?
3. Как в работе определяется объем воздуха, протекающего через капилляр?
4. Каким образом в работе оцениваются значения величин  $\langle v \rangle$ ,  $\lambda$ ,  $z$ ,  $n$ ,  $d_{эф}$ , и т.д.?

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 25

### Определение коэффициента вязкости жидкости по методу Стокса

Цель работы: изучение явления внутреннего трения в жидкости.

#### Методика измерений

На твердый шарик, падающий в вязкой жидкости, действуют три силы: сила тяжести  $F_T = mg = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g$  (где  $\rho$  - плотность материала шарика), выталкивающая сила (сила Архимеда)  $F_A = m_{ж}g = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_1 g$  ( $\rho_1$  - плотность жидкости) и сила сопротивления движению шарика, обусловленная силами внутреннего трения жидкости.

При движении шарика слой жидкости, примыкающий к поверхности шарика, прилипает к нему и, следовательно, движется со скоростью шарика. Ближайшие смежные слои жидкости также приводятся в движение, но их скорость будет тем меньше, чем дальше они находятся от шарика.

Если шарик падает в жидкости, простирающейся безгранично по всем направлениям, не оставляя за собой никаких завихрений (это

реализуется при малых скоростях падения шариков малых размеров), то, как показал Стокс, сила сопротивления:

$$F_c = 6\pi\eta ur, \quad (5.68)$$

где  $\eta$  - коэффициент вязкости жидкости,  $u$  - скорость шарика,  $r$  - радиус шарика.

В случае падения шарика в жидкости уравнение движения (второй закон Ньютона) имеет вид

$$F_T - F_A - F_c = ma$$

или

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho g - \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_1 g - 6\pi\eta ur = m \frac{du}{dt}. \quad (5.69)$$

Все три силы, входящие в левую часть уравнения (5.69), направлены по вертикали: сила тяжести вниз, выталкивающая сила и сила сопротивления - вверх.

На начальном участке шарик падает с ускорением  $a > 0$  и его скорость увеличивается. При этом сила сопротивления возрастает. После достижения некоторой скорости  $u_0$ , при которой сумма всех действующих на шарик сил становится равной нулю, шарик будет двигаться с постоянной скоростью. Такое движение шарика называется установившимся. В этом случае уравнение (5.69) принимает вид

$$\frac{4}{3}\pi r^3 g(\rho - \rho_1) - 6\pi\eta u_0 r = 0. \quad (5.70)$$

Решая уравнение (5.70) относительно коэффициента внутреннего трения, получаем

$$\eta = \frac{2(\rho - \rho_1)gr^2}{9u_0}.$$

На практике невозможно осуществить падение шарика в безграничной среде, так как исследуемая жидкость находится в каком-то сосуде, имеющем стенки.

Если шарик падает вдоль оси цилиндрического сосуда с внутренним радиусом  $R$ , то учет влияния стенок приводит к следующему выражению для коэффициента вязкости

$$\eta = \frac{2}{9}gr^2 \frac{(\rho - \rho_1)}{u_0 \left(1 + 2,4 \frac{r}{R}\right)}. \quad (5.71)$$

Наличие таких границ жидкости, как дно сосуда и верхняя поверхность жидкости, этой формулой не учитывается.

### Экспериментальная установка

В работе в качестве сосуда, в котором находится исследуемая жидкость, используется стеклянный цилиндр (рис.5.18). Снаружи цилиндра укреплены кольцевые горизонтальные метки 1 и 2, расположенные одна от другой на расстоянии  $L$  (верхняя метка должна быть ниже уровня жидкости на 5...8 см). Цилиндр укреплен на подставке, имеющей винты и отвес, предназначенный для установки вертикальности цилиндра. На этой же подставке укреплена шкала, по которой измеряют расстояние  $L$ . Время падения шариков измеряется секундомером.

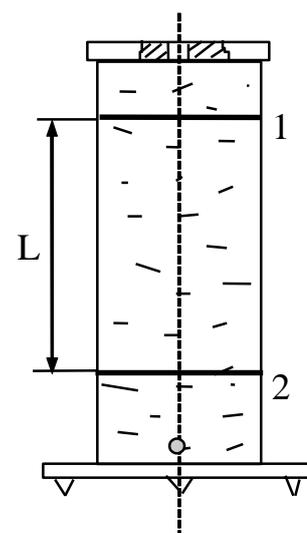


Рис. 5.18

### Порядок выполнения работы

1. Установить метки 1 и 2 на цилиндре и измерить расстояние  $L$  между ними по шкале.

2. Определить диаметр  $d$  каждого шарика при помощи микрометра и рассчитать радиусы шариков.

3. Опустить шарик в жидкость как можно ближе к оси цилиндра и с помощью секундомера измерить время падения шарика между метками 1 и 2. Опыт провести не менее чем с тремя шариками. Результаты измерений занести в табл.5.10.

Таблица 5.10

№ п/п	$\rho$ кг/м <sup>3</sup>	$\rho_1$ кг/м <sup>3</sup>	$r$ м	$R$ м	$L$ м	$\tau$ с	$u_0$ м/с	$\eta$ кг/(м·с)	$\bar{\eta}$ кг/(м·с)
1									
2									
3									
4									
5									
6									

4. Определить скорость установившегося движения шарика по формуле

$$u_0 = \frac{L}{\tau}.$$

5. Вычислить коэффициент вязкости  $\eta$  для каждого опыта по формуле (5.71) и найти среднее значение  $\bar{\eta}$ .

6. Оценить погрешность результатов измерений.

### Контрольные вопросы

1. В чем состоит метод Стокса?
2. От чего зависит сила сопротивления шарика при движении в жидкости?
3. Какие силы действуют на шарик при его движении?
4. Записать уравнение движения шарика на начальном участке и при его установившемся движении.

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 24

### Определение коэффициента теплопроводности воздуха методом нагретой нити

Цель работы: изучения теплопроводности как одного из явлений переноса в газах.

#### Методика измерений

Воздухом заполняют пространство между двумя коаксиальными цилиндрами, причем внутренним цилиндром может быть просто тонкая проволока, которая является одновременно и нагревателем и термометром сопротивления. Если через проволоку пропускать ток, а на внешней стенке наружного цилиндра поддерживать постоянную температуру, более низкую, чем температура нагревателя, то в кольцевом слое газа возникает радиальный поток теплоты, направленный от проволоки к стенке.

Распространение теплоты в газах происходит тремя способами: тепловым излучением (перенос энергии электромагнитными волнами), конвекцией (перенос энергии за счет перемещения слоев газа в пространстве из областей с высокой температурой в области с низкой температурой) и теплопроводностью.

Однако поток лучистой энергии при невысоких температурах и малом диаметре нагревателя составляет незначительную долю переносимого количества теплоты, а конвекция устраняется подбором диаметра наружной трубки и ее вертикальным расположением в установке. Поэтому с достаточной точностью можно полагать, что передача теплоты от нагревателя к наружной трубке будет осуществляться только за счет теплопроводности газа.

Количество теплоты, прошедшее за одну секунду через цилиндрический слой газа, можно определить с помощью закона Фурье. Применим уравнение (5.34) к задаче с осевой симметрией, то есть рассмотрим два длинных коаксиальных цилиндра, пространство между которыми заполнено газом, коэффициент теплопроводности

которого необходимо измерить. На рис.5.19 показано поперечное сечение этих цилиндров. В качестве внутреннего цилиндра служит натянутая металлическая нить. Температуры поверхностей и радиусы внешнего и внутреннего цилиндров соответственно обозначим через  $T_1$ ,  $r_1$  и  $T_2$ ,  $r_2$ .

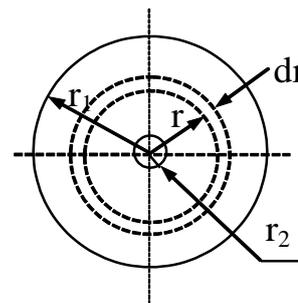


Рис. 5.19

При атмосферном давлении температура слоя газа, прилегающего к стенкам, равна температуре стенок. Следовательно, температура слоя газа, прилегающего к нити, соответствует  $T_2$ , а прилегающего к стенкам цилиндра -  $T_1$ .

Выделим внутри газа кольцевой слой радиусом  $r$ , толщиной  $dr$  и длиной  $L$ . По закону Фурье (5.34) тепловой поток  $Q$ , то есть количество теплоты, проходящее через этот слой за секунду, можно записать в виде

$$Q = -\kappa \frac{dT}{dr} S = -\kappa \frac{dT}{dr} 2\pi r L. \quad (5.72)$$

Это уравнение можно решить методом разделения переменных:

$$\frac{dr}{r} = -\frac{2\pi\kappa L}{Q} dT. \quad (5.73)$$

Полагая  $\kappa = \text{const}$  в исследуемом диапазоне температур и интегрируя обе части уравнения (5.73), получаем

$$\int_{r_2}^{r_1} \frac{dr}{r} = -\frac{2\pi\kappa L}{Q} \int_{T_2}^{T_1} dT.$$

Откуда

$$\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right) = \frac{2\pi\kappa L}{Q} (T_2 - T_1). \quad (5.74)$$

Из уравнения (5.74) находим формулу для определения коэффициента теплопроводности

$$\kappa = \frac{Q \ln(r_1/r_2)}{2\pi L \Delta T}. \quad (5.75)$$

Здесь  $\kappa$  - коэффициент теплопроводности исследуемого газа, отнесенный к средней температуре этого газа,  $\Delta T$  - разность температур на границах слоя газа от  $r_1$  до  $r_2$ .

Таким образом, для определения коэффициента теплопроводности необходимо знать разность температур в слое газа и величину теплового потока  $Q$ .

Разность температур  $\Delta T$  в слое газа можно найти косвенным методом, измеряя электрическое сопротивление нити. Запишем формулы сопротивлений нити при двух значениях температур:

$$\begin{aligned} R_{H_1} &= R_0(1 + \alpha t_1) \\ R_{H_2} &= R_0(1 + \alpha t_2) \end{aligned} \quad (5.76)$$

где  $R_0$  - сопротивление нити при  $t = 0^\circ\text{C}$ ,  $\alpha$  - температурный коэффициент материала проволоки.

Исключив из двух уравнений (5.76)  $R_0$ , найдем

$$\Delta T = t_2 - t_1 = \frac{\Delta R_H}{R_{H_1} \alpha} (1 + \alpha t_1), \quad (5.77)$$

где  $\Delta R_H = R_{H_2} - R_{H_1}$ .

Следовательно, для определения разности температур в слое газа необходимо измерить температуру  $t_1$  стенки наружного цилиндра и сопротивление нити при температуре  $t_1$  и некоторой более высокой температуре  $t_2$ .

После установления стационарного режима, при котором разность температур в слое газа не меняется со временем, тепловой поток можно принять равным мощности электрического тока в нити:

$$Q = i_H^2 R_{H_2}. \quad (5.78)$$

Подставляя (5.78) в (5.75), получаем

$$\kappa = \frac{i_H^2 \cdot R_{H_2} \ln(D/d)}{2\pi L \Delta T}. \quad (5.79)$$

Здесь  $D$  и  $d$  - диаметры внешнего цилиндра и нити;  $\Delta T$ ,  $i_H$  - разность температур, определяемая по формуле (5.77), и соответствующий ей ток в нити.

### Экспериментальная установка

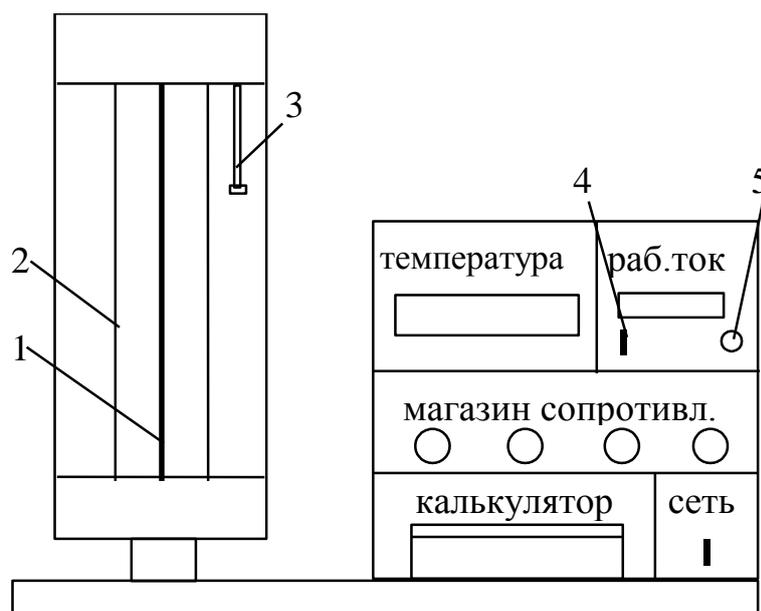


Рис. 5.20

Для определения коэффициента теплопроводности воздуха предназначена экспериментальная установка, общий вид которой приведен на рис.5.20.

Рабочий элемент состоит из стеклянной трубки 2, заполненной воздухом, по оси которой натянута тонкая вольфрамовая проволока 1.

В течение эксперимента температура трубки поддерживается постоянной, что обеспечивается принудительной циркуляцией воздуха с помощью вентилятора между трубкой и кожухом рабочего элемента. Для измерения температуры трубки предназначен полупроводниковый термометр 3.

Сопротивление нити измеряется посредством электрического моста (рис.5.21), одно плечо которого - вольфрамовая нить ( $R_H$ ), другое - магазин сопротивлений ( $R_M$ ), вмонтированный в блок приборов установки. Сопротивление двух других плеч моста соответственно  $R_1 = 8 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 100 \text{ Ом}$ .

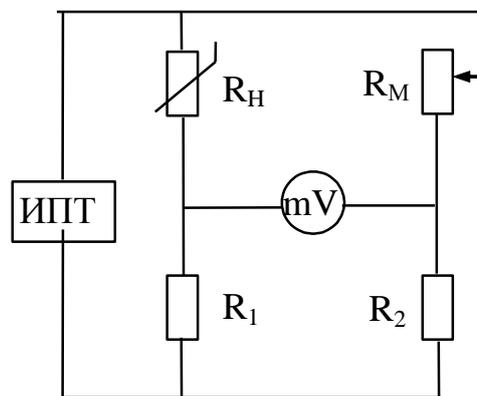


Рис. 5.21

Для измерения сопротивления необходимо установить тумблер 4 в нижнее положение (см. рис.5.20), тогда на цифровом индикаторе фиксируются показания миллиамперметра, включенного в диагональ электрического моста. Балансировку электрического моста производят посредством декадных переключателей магазина сопротивлений, добиваясь минимального значения ( $i \rightarrow 0$ ) тока, протекающего через диагональ моста.

Сопротивление нити можно рассчитать из соотношения

$$R_H = \frac{R_M}{k}, \quad (5.80)$$

где  $k = R_2/R_1$ ,  $k = 12,5$ ;  $R_M$  - показание магазина сопротивлений.

Величина рабочего тока в установке задается с помощью регулятора 5 и регистрируется на цифровом индикаторе при переключении тумблера 4 в верхнее положение.

Ток, проходящий через нить, рассчитывается по формуле

$$i_H = i \frac{k}{k+1}, \quad \text{или} \quad i_H = 0,926 \cdot i. \quad (5.81)$$

Геометрические размеры рабочего элемента: диаметр трубки  $D$ , диаметр нити  $d$ , длина трубки  $L$ , а также температурный коэффициент материала нити  $\alpha$  указаны на лицевой панели установки.

### Порядок выполнения работы

1. Включить установку тумблером “Сеть”.
2. Установить на магазине сопротивлений с помощью декадных переключателей сопротивление  $R_M = 100 \text{ Ом}$ .
3. Установить значение рабочего тока  $i = 1 \text{ мА}$ , при котором температура нити практически остается неизменной (“негреющий” ток).
4. Переключив тумблер 4 на показания моста сопротивлений, сбалансировать мостовую схему декадными переключателями и занести показание магазина сопротивлений в табл.5.11.

Таблица 5.11

Номер измерения	$i$ мА	$R_M$ Ом	$\langle R_M \rangle$ Ом	$R_{H1}$ Ом
1	1			
2	3			
3	5			

5. Повторить измерения по п.4 для значений рабочего тока в пределах (1...5) мА (“негреющий ток”).
6. Рассчитать среднее показание магазина сопротивлений и сопротивление нити при комнатной температуре  $t_1$  по формуле (5.81).
7. Установить значение рабочего тока  $i = 50 \text{ мА}$ .
8. По истечении 2...3 минут сбалансировать мостовую схему, записав показания магазина сопротивлений в табл.5.12.

Таблица 5.12

№ п/п	$i$ мА	$R_M$ Ом	$i_H$ мА	$R_{H2}$ Ом	$\Delta R_H$ Ом	$t_1$ °С	$\Delta T$ К	$\kappa$ Вт/(м·К)	$\bar{\kappa}$ Вт/(м·К)
1	50								
2	75								
3	100								
4	125								
5	150								

9. Повторить измерения по п.8 для 3..5 значений рабочего тока в диапазоне  $i = (50...150) \text{ мА}$ .
10. Рассчитать величину тока  $i_H$ , проходящего через нить, по формуле (5.81) и сопротивление нити  $R_H$  по формуле (5.80).
11. Записать в табл.5.12 показания полупроводникового термометра, определяющего температуру  $t_1$  внешнего слоя воздуха и

стенки наружной трубки. Определить разность температур  $\Delta T$  нити и стенки наружной трубки из соотношения (5.77).

12. Для каждого режима рассчитать коэффициент теплопроводности воздуха по формуле (5.79). Найти среднее значение коэффициента теплопроводности  $\bar{\kappa}$ .

13. Оценить погрешность результатов измерений.

14. Выключить установку тумблером “Сеть”.

### Контрольные вопросы

1. Назовите возможные способы передачи тепла.

2. В чем заключается метод нагретой нити, служащий для определения коэффициента теплопроводности газов?

3. Выведите расчетную формулу для определения коэффициента теплопроводности методом нагретой нити.

4. Как оценить среднюю длину свободного пробега и эффективный диаметр молекул газа, используя явление теплопроводности?

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 31

### Изучение зависимости коэффициента теплопроводности воздуха от температуры методом нагретой нити

Цель работы: экспериментальное определение коэффициента теплопроводности воздуха и его зависимости от температуры воздуха.

#### Методика измерений

Для измерения коэффициента теплопроводности газов используется прибор, состоящий из двух длинных коаксиальных цилиндров радиусами  $r_1$  и  $r_2$ , пространство между которыми заполняется исследуемым газом (в нашем случае воздух).

Один из цилиндров (внутренний) нагревается, а другой охлаждается водой так, чтобы его температура  $T_2$  оставалась все время постоянной. Внутренним цилиндром в данной работе служит тонкая проволока, по которой пропускается электрический ток, так что она же служит и нагревателем.

Через некоторое время после включения нагревателя устанавливается стационарное состояние, при котором температура внутреннего, нагреваемого цилиндра (нити) тоже становится постоянной. Тем самым между внутренним и внешним цилиндрами

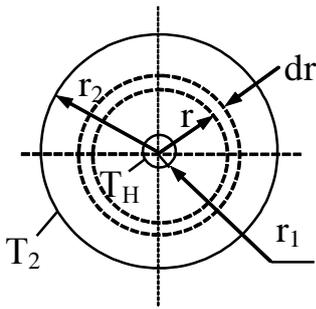


Рис. 5.22

устанавливается постоянная разность температур ( $T_H - T_2$ ). Величина этой разности зависит от теплопроводности. Найдем эту зависимость.

При нагревании нити создается градиент температуры  $\frac{dT}{dr}$ . Площадь, через которую

передается тепло, равна площади поверхности цилиндра, коаксиального с нагретой нитью:  $S = 2\pi rL$ , где  $L$  - высота

цилиндра,  $r$  - произвольный радиус (см. рис.5.22).

По закону Фурье (5.34) тепловой поток  $Q$ , то есть количество теплоты, проходящее через этот слой за секунду, можно записать в виде

$$Q = -\kappa \frac{dT}{dr} S = -\kappa \frac{dT}{dr} 2\pi rL. \quad (5.82)$$

Это уравнение можно решить методом разделения переменных:

$$\frac{dr}{r} = -\frac{2\pi\kappa L}{Q} dT. \quad (5.83)$$

Для среднего (по радиусу) значения коэффициента теплопроводности получаем

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = -\frac{2\pi\kappa L}{Q} \int_{T_H}^{T_2} dT.$$

Откуда

$$\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) = \frac{2\pi\kappa L}{Q} (T_H - T_2), \quad (5.84)$$

или

$$Q = \frac{2\pi\kappa L}{\ln(r_2/r_1)} (T_H - T_2). \quad (5.85)$$

Увеличение электрической мощности  $P$ , выделяемой в нити, соответствует увеличению теплового потока  $dP = dQ$  нити, при этом температура нити возрастает на величину  $dT_H$ . При условии, что температура внешней стенки  $T_2$  постоянна, из (5.85) имеем

$$dQ = \frac{2\pi\kappa L}{\ln(r_2/r_1)} dT_H. \quad (5.86)$$

Так как вблизи нити теплопроводность воздуха определяется температурой  $T_H$ , то в (5.86) ее значение  $\kappa$  относится к этой температуре. При возрастании температуры нити на  $dT_H$ , дополнительный перенос тепловой мощности  $dQ$  от нити к стенке внешнего цилиндра определяется только теплопроводностью слоя воздуха вблизи нити.

Из соотношения (5.86) получим

$$\kappa = \frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi L} \cdot \frac{dQ}{dT_H}. \quad (5.87)$$

Для определения  $dQ/dT_H$  необходимо знать зависимость  $Q = f(T_H)$ , которую строят по экспериментальным данным, как показано на рис.5.23.

Значение  $dQ/dT_H$  вычисляют графическим методом. Вблизи расчетной точки выделяют малую разность температур  $\Delta T_H$  и соответствующее ей приращение теплового потока  $\Delta Q$ . Тогда искомое значение производной вблизи расчетной точки равно

$$\frac{dQ}{dT_H} \cong \frac{\Delta Q}{\Delta T_H}. \quad (5.88)$$

Значение теплового потока  $Q$  определяют по формуле:

$$Q = i_H u_H, \quad (5.89)$$

где  $i_H$  - ток, протекающий через образцовое сопротивление (шунт), значение  $R_{ш}$  которого задано, и нить:

$$i_H = \frac{u_R}{R_{ш}}. \quad (5.90)$$

Падение напряжения на нити  $u_H$  и образцовом сопротивлении  $u_R$  определяются милливольтметром.

Сопротивление нити вычисляется по формуле:

$$R_H = \frac{u_H}{i_H}. \quad (5.91)$$

и зависит от температуры нити  $t_H$

$$R_H = R_0(1 + \alpha \cdot t_H), \quad (5.92)$$

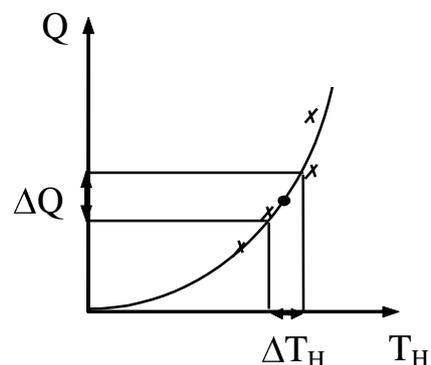


Рис. 5.23

где  $R_0$  - электрическое сопротивление нити при температуре  $t_{н0} = 0^\circ\text{C}$ ,  
 $\alpha$  - температурный коэффициент сопротивления материала нити.

Из формулы (5.98) можно определить температуру нити:

$$t_{\text{н}} = \frac{R_{\text{н}} - R_0}{\alpha R_0}, \quad (5.93)$$

$$T_{\text{н}} = t_{\text{н}} + 273.$$

Следует отметить, что использованная методика измерения коэффициента теплопроводности не учитывает ряд побочных физических явлений, сопровождающих процесс теплопередачи, а именно:

- 1) тепловые потери через концы нити;
- 2) конвективный перенос тепла от нити к стенке трубки (конвекция - это перенос тепла вместе с перемещением массы газа при наличии разности температур);

Эти процессы приводят к методической погрешности определения коэффициента теплопроводности воздуха.

### Экспериментальная установка

Для определения коэффициента теплопроводности воздуха предназначена экспериментальная установка, принципиальная схема которой приведена на рис. 5.24.

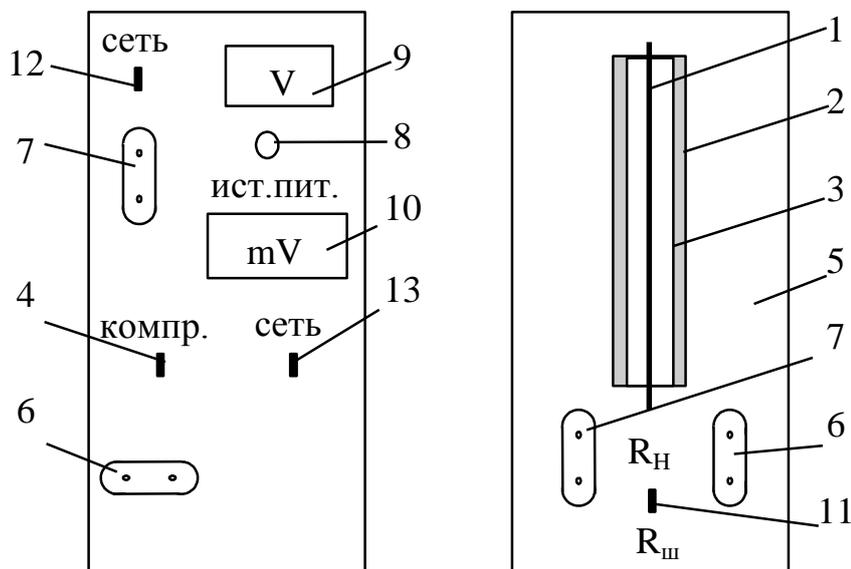


Рис. 5.24

Нагреваемая вольфрамовая нить 1 протянута по оси симметрии цилиндрического стеклянного баллона 2 с двойными стенками; между стенками залита вода.

Температура воды в баллоне 2 и, следовательно, температура стенки трубки 3 постоянна в течение опыта. Баллон с нитью закреплен в модуле 5 на лабораторном стенде. На панели расположены электрические разъемы 6 и 7 для соединения контактов модуля с электроизмерительными приборами.

Вольфрамовая нить 1 через разъемы 7 подключается к универсальному блоку питания 9 УБП. Напряжение  $u_0$  на нить подается поворотом ручки 8 УБП по часовой стрелке. Отсчет  $u_0$  ведется по верхней шкале.

**ВАЖНО!** На установку нельзя подавать напряжение более (8...10) вольт!!.

Напряжения на нити  $u_n$  и на образцовом сопротивлении  $u_R$  измеряются цифровым вольтметром 10, подключенным к разъемам 6.

При установке тумблера 11 в положение  $R_H$  на экране цифрового вольтметра 10 высвечиваются значения  $u_n$  (в вольтах). При установке тумблера 11 в положение  $R_{ш}$  на вольтметре 10 высвечиваются значения  $u_R$  падения напряжения на образцовом сопротивлении (в милливольтках).

Данные установки:

длина вольфрамовой нити  $L = 0,4$  м,

радиус нити  $r_1 = 5 \cdot 10^{-5}$  м,

внутренний радиус трубки  $r_2 = 3 \cdot 10^{-3}$  м,

сопротивление нити при  $t_{н0} = 0^\circ\text{C}$   $R_0 = 3$  Ом

образцовое сопротивление  $R_{ш} = 0,1$  Ом,

температурный коэффициент сопротивления нити  $\alpha = 3,6 \cdot 10^{-3}$  1/град.

### Порядок выполнения работы

1. Соединить проводами разъемы 6 с разъемами вольтметра 10.
2. Соединить проводами разъемы 7 с разъемами 9 УБП.
3. Включить тумблеры 12,13.
4. Проводить эксперименты можно только при значениях напряжения на источнике питания 9 УБП **не превышающих (8...10) вольт** (по верхней шкале). Поворотом ручки 8 по часовой стрелке установить первое значение напряжения на нити  $u_0 = 1$  В на УБП.
5. Провести отсчет напряжения  $u_n$  по вольтметру 10 (тумблер 11 - в положении  $R_H$ ). Результат измерения занести в табл.5.13.
6. Провести отсчет напряжения на образцовом сопротивлении  $u_R$  по вольтметру 10 (тумблер 11 в положении  $R_{ш}$ ).
7. Пункты 5 и 6 повторить для 8...10 значений напряжения, установленных по верхней шкале 9 УБП в пределах (1...8) В.
8. Снять напряжение на УБП поворотом ручки 15 против часовой стрелки. Выключить измерительные приборы и стенд.

Таблица 5.13

$u_0$ по УБП В	$u_H$ В	$u_R$ мВ	$i_H$ А	$Q$ Вт	$R_H$ Ом	$T_H$ К	$dQ/dT_H$ Вт/К	$\kappa$ Вт/(м·К)
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								
8								

9. Определить для каждого опыта  $i_H$  по формуле (5.90) и значения теплового потока по формуле (5.89).

10. Рассчитать сопротивление нити по формуле (5.91) и из выражений (5.93) - температуру нити.

11. Построить график зависимости  $Q = f(T_H)$ . Через совокупность экспериментальных точек провести аппроксимирующую кривую и определить производную  $dQ/dT_H$  для выбранных расчетных точек (не менее 4-х значений), как показано на рис.5.23.

12. Рассчитать по формуле (5.93) коэффициент теплопроводности  $\kappa$  в расчетных точках.

13. Построить график зависимости  $\kappa = f(T_H)$ .

14. Оценить погрешность результатов измерений.

### Контрольные вопросы

1. В чем заключается метод нагретой нити?
2. Выведите расчетную формулу для определения коэффициента теплопроводности методом нагретой нити.
3. Как в данной работе определяется величина  $dQ/dT_H$ ?
4. Какие физические явления вносят погрешность в используемую в работе методику измерения  $\kappa$ ?

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 28

### Определение коэффициента теплопроводности сыпучих тел методом плоского слоя

Цель работы: определение коэффициента теплопроводности речного песка.

### Методика измерений

Для определения коэффициента теплопроводности сыпучих тел (песка) их насыпают плоским цилиндрическим слоем толщиной  $L$  и радиусом  $r$ . С одной стороны слоя его поверхность обогревается водяным паром. Следовательно, температура этой поверхности  $T_1$  не изменяется и равна температуре кипения воды.

Количество теплоты  $Q$ , отдаваемое паром, проходит через слой песка толщиной  $L$  и передается сосуду с водой (калориметру), который непосредственно прилегает к другой поверхности слоя. При этом температура воды повышается от  $T'_2$  до  $T''_2$ .

Поскольку слой песка мал, основное количество тепла идет на нагрев сосуда с водой и уравнение теплового баланса можно записать в виде

$$Q = (m_1 c_1^{уд} + m_2 c_2^{уд})(T''_2 - T'_2), \quad (5.94)$$

где  $m_1$ ,  $c_1^{уд}$  - масса и удельная теплоемкость вещества калориметра;  $m_2$ ,  $c_2^{уд}$  - масса и удельная теплоемкость воды.

Это же количество теплоты проходит через слой песка. Согласно уравнению теплопроводности Фурье (5.34)

$$Q = -\kappa \frac{dT}{dx} S \tau, \quad (5.95)$$

где  $\kappa$  - коэффициент теплопроводности песка,  $\tau$  - время нагрева,  $S = \pi r^2$  - площадь поверхности слоя,  $r$  - его радиус.

Считая, что температура поверхности слоя песка, прилегающей к сосуду с водой, равна

$$T_2 = \frac{T'_2 + T''_2}{2},$$

а изменение температуры в слое песка линейно зависит от его толщины  $L$ , получаем

$$\frac{dT}{dx} \cong \frac{T_2 - T_1}{L} = \frac{1}{L} \left( \frac{T'_2 + T''_2}{2} - T_1 \right). \quad (5.96)$$

Следовательно, формула (5.83) принимает вид

$$Q = \frac{\kappa}{L} \left( T_1 - \frac{T'_2 + T''_2}{2} \right) \pi r^2 \tau. \quad (5.97)$$

Приравнявая правые части в формулах (5.94) и (5.97), получаем расчетную формулу для определения коэффициента теплопроводности песка

$$\kappa = \frac{(m_1 c_1^{уд} + m_2 c_2^{уд})(T_2'' - T_2')L}{\left(T_1 - \frac{T_2' + T_2''}{2}\right) \pi r^2 \tau}, \quad (5.98)$$

где  $T_1$  - температура пара. В работе можно принять  $T_1 = 373$  К.

### Экспериментальная установка

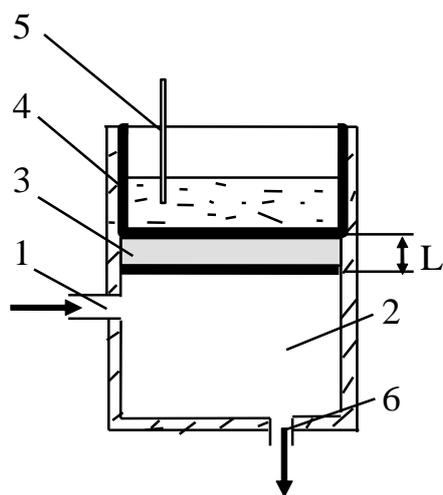


Рис. 5.25

Для определения коэффициента теплопроводности сыпучих тел используется прибор, схема которого показана на рис.5.25. Его нижняя часть 2 представляет собой паровую коробку. На дно верхней части насыпают слой песка 3. На песок ставят калориметр 4. В калориметр мензуркой наливают воду и определяют ее массу:

$$m_2 = \rho_v V, \quad (5.99)$$

где  $\rho_v = 1000$  кг/м<sup>3</sup> - плотность воды,  $V$  - объем воды в сосуде.

Через отверстие 1 в паровую коробку из электрического кипятильника поступает пар. Из отверстия 6 выходит избыток пара и сконденсированная вода.

Температуру воды в сосуде (и верхней поверхности слоя песка) измеряют термометром 5.

#### Данные установки:

удельная теплоемкость вещества сосуда  $c_1^{уд} = 394$  Дж/(кг·К),

удельная теплоемкость воды  $c_2^{уд} = 4200$  Дж/(кг·К).

Радиус и толщина слоя песка, а также масса сосуда приведены на установке.

### Порядок выполнения работы

1. С помощью мензурки в калориметр 4 налить  $V = 2,5$  л воды (заполнив калориметр водой примерно наполовину). Определить массу залитой воды по формуле (5.99).

2. Закрыть сосуд крышкой и погрузить в воду термометр 5.

3. Включить электрокипятильник в сеть напряжением 220 В.

4. Определить атмосферное давление по барометру, находящемуся в лаборатории.

5. По таблице 5.14 зависимости температуры кипения от атмосферного давления определить температуру кипения воды  $T_1$ .

Таблица 5.14

Атмосферное давление (Па)	96000	97000	98000	99000	10000	10010	10020
Температура кипения воды (°С)	98,6	98,9	99,2	99,5	99,8	100	100,3

6. Дождаться, когда в паровой коробке 2 установится температура  $T_1$ , соответствующая температуре кипения воды при данном атмосферном давлении. В этот момент появится пар из отверстия 6. При появлении пара снять показание термометра  $T'_2$  и включить секундомер. Полученное измерение записать в табл.5.15.

Таблица 5.15

$m_1$	$c_1^{уд}$	$m_2$	$c_2^{уд}$	$T_1$	$T'_2$	$T''_2$	$\tau$	$r$	$L$	$\kappa$
кг	$\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$	кг	$\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$	К	К	К	с	м	м	$\frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$

7. После повышения температуры на термометре на  $(3...5)^\circ\text{C}$  измерить температуру  $T''_2$  и время нагрева  $\tau$ .

8. Выключить электрокипятильник из сети.

9. Вычислить коэффициент теплопроводности песка  $\kappa$  по формуле (5.98).

10. Оценить погрешность результатов измерений.

### Контрольные вопросы

1. В чем состоит метод определения коэффициента теплопроводности сыпучих тел?

2. Запишите уравнение теплового баланса для данной работы.

3. Как в данной работе определяется значение градиента температуры в слое песка?

4. Как можно в работе определить момент начала измерений температуры воды?

## Вопросы по разделу 5

1. Понятие случайной величины и вероятности случайного события. Условие нормировки.
2. Функция распределения случайных величин, физический смысл и свойства. Расчет средних значений случайных величин.
3. Функция распределения Максвелла по модулю скорости, ее физический смысл.
4. Характерные скорости движения молекул.
5. Распределение частиц в силовом поле (распределение Больцмана). Барометрическая формула.
6. Физические основы явлений переноса.
7. Основные понятия теории столкновения молекул. Средняя длина свободного пробега, эффективный диаметр молекулы, среднее число соударений в секунду.
8. Вывод уравнения вязкости на основе молекулярно-кинетической теории газов.
9. Физический смысл и зависимость коэффициента вязкости газа от давления и температуры.
10. Вывод уравнения теплопроводности на основе молекулярно-кинетической теории газов.
11. Физический смысл и зависимость коэффициента теплопроводности от давления и температуры газа.
12. Вывод уравнения диффузии на основе молекулярно-кинетической теории газов.
13. Физический смысл и зависимость коэффициента диффузии от температуры и давления газа.

## ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ

### Механика

1. Кинематика поступательного движения. Перемещение, путь, скорость, ускорение нормальное и тангенциальное, полное ускорение.
2. Кинематика вращательного движения. Угловое перемещение, скорость, ускорение. Связь между линейными и угловыми величинами.
3. Динамика поступательного движения материальной точки. Законы Ньютона. Понятие массы, силы.
4. Инерциальные системы отсчета. Принцип относительности Галилея. Преобразования Галилея.
5. Основное уравнение динамики поступательного движения материальной точки и системы материальных точек. Понятие центра масс. Уравнение движения центра масс.
6. Импульс. Закон сохранения импульса.
7. Динамика вращательного движения материальной точки. Понятия момента инерции, момента сил, момента импульса.
8. Основное уравнение динамики вращательного движения материальной точки и твердого тела относительно неподвижной оси (вывод).
9. Расчет момента инерции тел правильной формы (стержень, диск). Теорема Штейнера.
10. Момент импульса материальной точки, твердого тела, закон сохранения момента импульса.
11. Полная кинетическая энергия движущихся и вращающихся тел. Работа при вращательном движении.
12. Работа постоянной и переменной силы. Мощность.
13. Консервативные и неконсервативные силы. Примеры.
14. Энергия. Потенциальная, кинетическая, полная механическая энергия. Закон сохранения энергии в механике.
15. Потенциальная энергия. Расчет потенциальной энергии сжатой пружины.
16. Потенциальное поле сил. Работа сил поля тяготения. Потенциальная энергия поля тяготения. Взаимосвязь силы и потенциальной энергии.
17. Законы сохранения импульса и энергии для абсолютно упругого и неупругого центральных ударов.
18. Механические колебания. Дифференциальное уравнение незатухающих гармонических колебаний, его решение. Скорость, ускорение, полная энергия колеблющейся точки.

19. Физический и математический маятники, вывод формулы для периода малых колебаний этих маятников.

20. Затухающие гармонические колебания. Дифференциальное уравнение затухающих колебаний, анализ его решения. Период колебаний. Логарифмический декремент затухания. Энергия затухающих колебаний.

21. Вынужденные гармонические колебания. Дифференциальное уравнение вынужденных гармонических колебаний, его решение. Установившиеся вынужденные гармонические колебания (уравнение кинематики этих колебаний).

22. Явление резонанса. Резонансная частота.

23. Сложение одинаково направленных гармонических колебаний. Биения.

24. Сложение взаимно перпендикулярных гармонических колебаний. Фигуры Лиссажу.

25. Дифференциальное уравнение плоской волны и его решение. Волны продольные и поперечные.

26. Фазовая и групповая скорости волн. Стоячие волны.

27. Принцип относительности в классической механике. Постулаты специальной теории относительности (постулаты Эйнштейна). Преобразования Лоренца.

28. Преобразования Лоренца. Преобразования Галилея. Закон сложения скоростей в релятивистской и классической механике (вывод).

29. Следствия из преобразований Лоренца: сокращение длины, замедление времени, одновременность событий.

30. Релятивистская динамика: масса, импульс, энергия. Закон взаимосвязи массы и энергии.

31. Пространственно-временной интервал, его свойства.

## Молекулярная физика, термодинамика

1. Физические основы молекулярно-кинетической теории строения вещества. Термодинамический и статистический методы исследования термодинамических систем. Микро- и макропараметры.

2. Идеальный газ. Уравнение состояния идеального газа, физический смысл входящих величин. Изотермы идеального газа.

3. Теорема о равномерном распределении энергии по степеням свободы в условиях термодинамического равновесия. Средняя энергия движения одной молекулы. Понятие температуры.

4. Внутренняя энергия идеального газа (вывод).

5. Первое начало термодинамики. Основные понятия: теплота, работа, внутренняя энергия.

6. Первое начало термодинамики применительно к изобарическому процессу. Работа изобарического расширения (сжатия) идеального газа.

7. Первое начало термодинамики применительно к изохорическому и изотермическому процессам. Работа расширения (сжатия) идеального газа в изотермическом процессе.

8. Теплоемкость. Удельная и молярная теплоемкости идеального газа. Теплоемкость газа при постоянном давлении  $C_p$  и постоянном объеме  $C_v$ . Связь  $C_p^{\text{мол}}$  и  $C_v^{\text{мол}}$  (вывод).

9. Адиабатический процесс. Уравнение Пуассона в координатах  $P$ - $V$ ,  $P$ - $T$ ,  $V$ - $T$ .

10. Адиабатический процесс. Первое начало термодинамики применительно к адиабатическому процессу. Работа расширения (сжатия) идеального газа в адиабатическом процессе.

11. Второе начало термодинамики, его содержание (формулировки).

12. Понятие энтропии. Измерение энтропии при обратимых и необратимых процессах.

13. Принцип работы тепловой машины. Термический к.п.д тепловой машины. Цикл Карно. К.п.д. цикла Карно (вывод).

14. Функция распределения случайных величин (физический смысл). Расчет средних значений случайных величин (пример).

15. Функция распределения Максвелла по модулю скорости, ее свойства. Характерные скорости движения молекул.

16. Функция распределения Максвелла по модулю скорости. Расчет числа частиц в заданном интервале скоростей.

17. Функция распределения Максвелла по компонентам скоростей. Нахождение наиболее вероятных и средних значений скоростей.

18. Функция распределения Максвелла по энергиям. Среднее и наиболее вероятное значение энергии молекул (вывод)

19. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории газов - вывод на основе статистической физики.

20. Распределение молекул в силовом поле. Распределение Больцмана. Барометрическая формула.

21. Основные понятия теории соударений молекул. Упругие, неупругие соударения молекул, средняя длина свободного пробега молекул, эффективное сечение упругих соударений, среднее число соударений в секунду.

22. Явления переноса. Диффузия газов. Уравнение диффузии. Понятие градиента плотности. Коэффициент диффузии, его зависимость от температуры и давления газа.

23. Явление вязкости. Уравнение вязкости. Градиент скорости. Коэффициент динамической вязкости, его зависимость от температуры и давления газа.

24. Явление теплопроводности. Уравнение теплопроводности. Градиент температуры. Коэффициент теплопроводности газа, его зависимость от давления и температуры газа.

25. Реальный газ. Уравнение состояния реального газа, физический смысл входящих величин. Изотермы реального газа.

26. Внутренняя энергия реального газа. Работа расширения (сжатия) реального газа при изотермическом процессе.

27. Кривая фазового равновесия. Уравнение Клапейрона–Клаузиуса. Фазовые переходы I и II рода.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Курс физики т. 1. Савельев И.В. - М., Наука, 1989 г.
2. Физические величины. Чертов А.Г. - М., Высшая школа, 1990 г.
3. Лекции по физике. Часть 1. Механика и молекулярная физика. Бреус С.Н. - М., МАИ, 2003 г.
4. Руководство к лабораторным работам по курсу физики/ Под ред. Василевской. Ю.Д. - М., МАИ, 1974.
5. Учебное пособие к лабораторным работам по разделу “Механика”/ Под ред. Осьминина Ю.П. и Нарбековой Е.Н. - М., МАИ, 1981.
6. Методические указания к лабораторным работам по механике (для подготовительного отделения)/ Под ред. Гусаровой Л.А. - М., МАИ, 1985.
7. Лабораторные работы по разделу “Механика”/ Под ред. Беликова Б.С., Семенова И.И. - М., МАИ, 1986.
8. Лабораторные работы по разделу “Колебания и волны”/ Под ред. Беликова Б.С., Семенова И.И. - М., МАИ, 1986.
9. Механика (пособие по лабораторным работам). Лаушкина Л.А., Солохина Г.Э., Третьякова О.Н. - М., МАИ, 1993.
10. Лабораторные работы по молекулярной физике и термодинамике/ Под ред. Осьминина Ю.П. и Семенова И.И. - М., МАИ, 1984.
11. Молекулярная физика и термодинамика. Лабораторные работы/ Под ред. Николаева Ф.А. - М., МАИ, 1991.

Учебное издание

*Владимир Михайлович Анисимов*  
*Ирина Николаевна Данилова*  
*Вера Сергеевна Пронина*  
*Галина Энгелевна Солохина*

Лабораторные работы по физике

**Часть 1**

Механика. Молекулярная физика  
и термодинамика